國立東華大學教育與潛能開發學系

教育碩士在職專班 碩士論文

指導教授：李　崗　博士

培育自由想像的數學素養
—以投影幾何課程為例

Cultivating Mathematical Competency through Free Imagination
— A Case Study of Projective Geometry Course

研究生：黃正志　撰

中華民國一一三年七月

學位考試委員會審定書

Certificate of Approval of Examination Committee

國立東華大學 教育與潛能開發學系 教育碩士在職專班

研究生 黃正志 君所提之論文

National Dong Hwa University

培育自由想像的數學素養—以投影幾何課程為例

Cultivating Mathematical Competency through Free Imagination
— A Case Study of Projective Geometry Course

經本委員會審查並舉行口試，認為符合 碩士 學位標準

After evaluation and the oral examination by the committee members, the student complies with the master (PhD) degree

學位考試委員會召集人 The Convener of Examination Committee 簽章

委員 Committee Member 簽章

委員 Committee Member 簽章

委員 Committee Member 簽章

指導教授 Advising Professor 簽章

系主任 The Director of Department 簽章

中華民國 113 年 5 月 20 日

ROC 113 Year 5 Month 20 Date

國立東華大學
NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

學位論文原創性聲明書
DECLARATION OF THESIS/DISSERTATION ORIGINALITY

學位論文題目：

Thesis/Dissertation Title：

本人在此聲明，所呈交的學位論文是在指導教授李崗的指導下，由個人獨立研究所完成之最終版本。本人對論文內容負責，除了文中已經標註引用處的內容外，論文不包含任何其他人已經發表或撰寫過的研究成果。對本研究及學位論文做出重要貢獻的個人和組織，均已在文中以明確方式標明。

該論文內容如有違反學術道德或學術規範的行為，如造假、變造、抄襲、研究成果重複發表或未適當引註，以違法或不當手段影響論文審查、不當作者列名等，本人願意承擔由此而產生的法律責任和法律後果。

I declare that the thesis/dissertation herein is the final version of my work, which is composed and accomplished individually under the guidance of my supervisor, Prof. Gang Li. I am responsible for the contents of this thesis/dissertation: It contains no research result that was previously published or written by another person. Information derived from published and unpublished work of others has been acknowledged in the text, and a list of references is given . Any contribution made by other individual or organization is explicitly acknowledged in the thesis/dissertation.

If any research misconduct, including fabrication, falsification, or plagiarism in proposing, performing, or reviewing research, or in reporting research results, is discovered in my thesis/dissertation, I am willing to bear corresponding legal responsibilities and all the results therefrom.

聲明人 Declarant： 黃正志 

日期 Date：2024/08/08

1120531修訂

致謝辭

自由，值得用一輩子來追尋。

想像，開展其中的無限可能。

路途上遇見好多、好多…，用文字記錄下的同時，更清晰的理解，也同時反思過往，探尋的過程，是一段艱辛卻異常值得的旅程。要感謝的人、事、物實在太多太多了！

首先感謝指導老師李崗教授，在決定論文方向時，因為他一句「既然要花時間，什麼是你最值得努力來完成的」，讓原本只想挑一個相對有把握方向的我，改成最想一頭栽入的領域—投影幾何。感謝李崗教授一路的陪伴，在無數個夜晚幫我釐清各種模糊的想法，讓原本僅存腦中的不成熟想法得以清晰呈現。

感謝英家銘教授仔細審查論文內容，為我疏理很多數學相關的疑惑；感謝王俊斌教授對於論文內容的指正與建議；感謝多位學校老師，為我澄清史代納的教育哲學，給我華德福教育多元且豐富的滋養；感謝學生，願意在課堂上與我一起發現投影幾何的美與魔力；感謝無數的數學家，推疊出如此豐富的數學知識；感謝我的家人，在我忙於課業及論文的同時，將家裡的大小事務打理得井然有序。

感謝投影幾何，在我對數學漸失熱情的時候，引領我用更全觀的視野重新看待數學，重新檢視看待世界的存在，讓我用不同於過往的方式活出不一樣的美麗人生。

黃正志 謹誌

2024 年 7 月

摘要

本研究確認「自由想像的數學素養」在高中階段的重要性，並肯定以「投影幾何課程」來培育的價值。研究方法有二，理論分析方面，著重在美感教育與數學教育；並透過行動研究，檢視投影幾何課程在設計與實施方面的成效，時間為2019年九月到2024年四月，場域為慈心華德福高中，對象是11年級的高中生。

從文獻中，描述歐氏幾何的起源與發展，確認邏輯演繹的價值，並分析以此為基底的解析幾何從部分看整體的思考脈絡；說明近代幾何的起源與發展，提出自由想像的重要，分析投影幾何中以整體看部分的相反思路。現在的教育注重前者，而忽略後者，本研究立場為：在培養學生邏輯推理的過程中，同時重視自由想像的重要性，並提出實際可執行的方式。

本研究的理論基礎，在美感教育方面，主要參閱康德的美學思想及史代納的華德福教育理念；在數學教育方面，從多方觀點確認數學之美，釐清數學思考的的價值，進而整理歸納出「以自由感知為基礎，經驗世界存有的美，以自由想像擴展視野，進而自由思考般的深入探索，輔以邏輯推理小心求證，做出自由的判斷，找出世界之中的真與純淨」的數學素養。

投影幾何課程的目的是透過精準繪圖，覺察自身感受，並運用邏輯推理得出無限及對偶的概念，進而掌握幾何的整體性，過程中練習自由想像，產生驚奇的美感經驗；內容包含從定理研討過程初探無限，繪製極性圖與曲線變換圖形，從中賞析整體圖像；教學上以歸納法為主，讓學生處在美感體驗、概念回顧、工作本整理、繪圖示範的固定節奏中學習；培養出繪圖、無限、對偶、步驟書寫及邏輯推理的良好學習表現，擁有主動參與、想像、驚奇感、自由感知及自由思考的良好學習態度，並以此為評量的指標。

研究發現，投影幾何課程不僅能符合傳統數學教育，培育探索數學的信心；訓練學生的邏輯推理，培養出思考、分析與解決問題的能力；欣賞以簡馭繁及結構嚴謹的數學特質。也能培育出自由想像的數學素養，讓視野更開闊，豐富更多可能性，以自由感知與自由思考面對問題，用更有創意的全新方法來解決問題。值得讓高中生認識此一課程，成為學生的必修科目。

關鍵詞：教育美學、投影幾何、美感教育、數學教育、華德福教育、課程設計


國立東華大學
NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

Abstract

This study affirms the importance of "mathematical competency through free imagination" in high school education and acknowledges the value of a "projective geometry course" to cultivate it. The research employs two methods: theoretical analysis focusing on aesthetic education and mathematical education, and primary research evaluating the design and implementation effectiveness of the course. The study period spanned from September 2019 to April 2024 at Ci-Xin Waldorf High School, targeting grade 11 students.

From the literature, I describe the origin and development of Euclidean geometry, affirming the value of logical deduction and analyzing the idea of “seeing the whole from parts” in analytic geometry. I explain the origin and development of modern geometry, emphasizing the importance of free imagination and analyzing the inverse idea of “seeing parts from the whole” in projective geometry. The current education system emphasizes the former while neglecting the latter. The thesis of this research argues for the importance of cultivating students’ free imagination and logical reasoning, offering practical and executable methods.

The theoretical foundation of this study mainly rests upon Kant's aesthetic philosophy and Steiner's Waldorf education principles in terms of aesthetic education. In terms of mathematical education, it confirms the beauty of mathematics from multiple perspectives and clarifies the value of mathematical thinking. Based on these principles, the study proposes to define mathematical competency to be "founded on free perception, experiencing the beauty of the world, expanding horizons through free imagination, and further exploring through free thinking, supplemented by careful verification through logical reasoning, making free judgments, and finding truth and purity in the world".

The purpose of the projective geometry course is to cultivate an understanding of infinity and duality through precision drawing, perceiving one’s own feelings and logical reasoning. This objective enables students to grasp the wholeness of geometry, practice free imagination and enjoy amazing aesthetic experiences. The course content includes exploring infinity through theorem study, drawing polarity diagrams and curve transformation diagrams to appreciate the overall imagery. In teaching, induction is the main method. This approach allows students to learn in a fixed rhythm of aesthetic experience, concept review, workbook organization, and drawing demonstration. The aim is to cultivate good learning performance in drawing, understanding of concepts such as infinity, duality, step writing and logical reasoning, as well as to possess a good learning attitude in active participation, imagination, sense of surprise, free perception and free thinking. These categories will form the basis for assessment.

The study reveals that the projective geometry course is compatible with traditional

mathematics education by fostering exploration in mathematics, training students' logical reasoning, critical thinking, analysis, and problem-solving, and promotes an appreciation for the mathematical qualities of “simplicity in complexity” and rigorous structure. The course also cultivates mathematical competency through free imagination, broadening perspectives, enriching possibilities, and teaches students to solve problems through such creative and innovative approaches to problem-solving as free perception and free thinking. It is worthwhile for high school students to become acquainted with this course, making it a compulsory subject.

Key Words： Educational Aesthetics, Projective Geometry, Aesthetic Education, Mathematics Education, Waldorf Education, Course Design

目　錄

第一章　緒論 1

第一節 研究背景與目的 1
壹、研究背景 1
貳、研究目的 9
第二節 研究方法與範圍 10
壹、理論分析 10
貳、行動研究 11
第三節 研究限制 15
壹、資料蒐集： 15
貳、個人能力 15

第二章 歐氏幾何的起源與發展 17

第一節 歐氏幾何的起源：邏輯演繹 17
壹、邏輯演繹的特例—從古文明到古希臘 17
貳、邏輯演繹的首度運用—畢達哥拉斯（Pythagoras 約 500 B.C.） 18
叁、邏輯演繹建立理論—柏拉圖（Plato 428～348B.C.） 21
肆、邏輯演繹的全面運用—歐幾里德（Euclid 約 300B.C.前後） 24
第二節 歐氏幾何的發展：解析幾何 27
壹、由細部看整體—勒內·笛卡爾（René Descartes 1596～1650） 27
貳、解析幾何的價值 31

第三章 近代幾何的起源與發展 35

第一節 近代幾何的起源：自由想像 36
壹、由整體看細部—吉拉德·笛沙格（Girard Desargues1591-1661） 36
貳、整體到細部對後世數學的影響 39
第二節 近代幾何的發展：非歐幾何 41
壹、自由想像的火苗—懷疑第五公設 42
貳、自由想像的多元發展—否定第五公設 44

第四章 投影幾何課程設計的理論基礎 49

第一節 美感教育 49
壹、康德的美學理論 49
貳、史代納的教育美學 55
第二節 數學教育 64
壹、數學美感 64
貳、數學思考 69
叁、數學素養 71

第五章 投影幾何課程的設計與實施 77

第一節 課程目的 77
壹、投影幾何課程的設計理念 78

貳、投影幾何的課程目的 80
第二節 課程內容 84
壹、　投影三角形 85
貳、完全三角形 86
叁、帕普斯定理 87
肆、帕普斯定理的對偶定理： 90
伍、平行線的關係 91
陸、笛沙格定理及其對偶定理 92
柒、巴斯卡定理及布萊安強定理 101
捌、點、線的對偶關係 105
拾、曲線變換 109
拾壹、曲線變換的連續性 111
拾貳、投影平面 117
拾叁、課後延伸補充 121
第三節 教學方法 125
壹、教學模式 125
貳、課程節奏 126
叁、課堂互動 129
第四節 學習評量 131
壹、評量指標 131
貳、評量分析 135
第六章 結論與建議 149
第一節 結論 149
壹、從歐氏幾何培育邏輯演繹的數學素養 149
貳、從近代幾何培育自由想像的數學素養 149
叁、從康德、史代納及數學家觀點確立投影幾何課程設計的理論基礎 150
肆、投影幾何課程設計可包含本研究的五大目的 151
伍、投影幾何課程內容可採用本研究的 13 個單元 151
陸、投影幾何課程實施可採取本研究的教學方法 152
柒、投影幾何課程評量可採納本研究的 11 項指標 152
第二節 建議 153
壹、給教育工作者的建議 153
貳、給教育研究者的建議 155
參考文獻 159

圖 目 錄

圖 1- 1 第一期循環圖 12
圖 1- 2 第二期流程圖 12

圖 2- 1 三角形數、正方形數 19
圖 2- 2 畢氏定理證明 19
圖 2- 3 面積 2 平方單位的正方形邊長 20
圖 2- 4 數學四元論 21
圖 2- 5 基本直角三角形 22
圖 2- 6 同一頂點三角形數量 23
圖 2- 7 正多面體 23
圖 2- 8 思考著重之處 25
圖 2- 9 圓錐曲線 28
圖 2- 10 距離與畢氏的關係 29
圖 2- 11 物體移動 V-T 圖 31
圖 2- 12 Oloid 31
圖 2- 13 解構 Oloid 32
圖 2- 14 物體移動位置-時間關係 33

圖 3- 1 笛沙格投影定理 37
圖 3- 2 雙曲線視為單曲線 38
圖 3- 3 圓與直線 39
圖 3- 4 新觀點看圓錐曲線 39
圖 3- 5 解構 Oloid 40
圖 3- 6 點與線形塑圓 40
圖 3- 7 製作莫比烏斯環 41
圖 3- 8 雙曲空間的平行線 46

圖 4- 1 情感交織關係 62
圖 4- 2 艾雪作品 67
圖 4- 3 艾雪作品 68
圖 4- 4 國王的主題 68

圖 5- 1 投影三角形 86
圖 5- 2 完全三角形 87

圖 5- 3 帕普斯定理 1 88
圖 5- 4 帕普斯定理 2 89
圖 5- 5 帕普斯定理 3 89
圖 5- 6 帕普斯定理的對偶定理 90
圖 5- 7 克卜勒螺旋槳 91
圖 5- 8 平行線交點探索 91
圖 5- 9 笛沙格定理 1 92
圖 5- 10 笛沙格定理 11 94
圖 5- 11 笛沙格定理 12 95
圖 5- 12 笛沙格定理 2 96
圖 5- 13 笛沙格定理 3 97
圖 5- 14 笛沙格定理 4 97
圖 5- 15 笛沙格定理 5 98
圖 5- 16 笛沙格定理 6 98
圖 5- 17 笛沙格定理 7 99
圖 5- 18 笛沙格定理 8 99
圖 5- 19 笛沙格定理 9 100
圖 5- 20 笛沙格定理 10 100
圖 5- 21 巴斯卡定理 1 101
圖 5- 22 布萊安強定理 1 102
圖 5- 23 巴斯卡定理 2 102
圖 5- 24 巴斯卡定理 3 103
圖 5- 25 巴斯卡定理 4 103
圖 5- 26 巴斯卡定理 5 104
圖 5- 27 巴斯卡定理 6 104
圖 5- 28 圓錐曲線中的帕巴定理 105
圖 5- 29 點在圓外對偶線 105
圖 5- 30 線過圓內對偶點 106
圖 5- 31 點在圓內對偶線 106
圖 5- 32 線過圓外對偶點 106
圖 5- 33 點線移動的對偶關係 107
圖 5- 34 對偶線形塑雙曲線 108
圖 5- 35 對偶點形塑雙曲線 108
圖 5- 36 對偶點形塑雙曲線 109
圖 5- 37 曲線變換步驟 1 109

圖 5- 38 曲線變換步驟 2 110
圖 5- 39 曲線變換步驟 3 110
圖 5- 40 曲線變換步驟 4 111
圖 5- 41 曲線變換圖 1 112
圖 5- 42 曲線變換圖 2 112
圖 5- 43 曲線變換圖 3 113
圖 5- 44 曲線變換圖 4 113
圖 5- 45 曲線變換圖 5 114
圖 5- 46 曲線變換圖 6 114
圖 5- 47 曲線變換圖 7 115
圖 5- 48 曲線變換圖 8 115
圖 5- 49 曲線變換圖 9 116
圖 5- 50 曲線變換圖 10 116
圖 5- 51 Mobius Net 117
圖 5- 52 投影平面—橢圓 1 118
圖 5- 53 投影平面—橢圓 2 118
圖 5- 54 拋物線定義 119
圖 5- 55 投影平面—拋物線 1 119
圖 5- 56 投影平面—拋物線 2 120
圖 5- 57 投影平面—雙曲線 121
圖 5- 58 六錐反演體製作 122
圖 5- 59 六錐反演體 122
圖 5- 60 六錐反演體內外翻轉 123
圖 5- 61 六錐反演體與 Oloid 124
圖 5- 62 六錐反演體形塑 Oloid 124
圖 5- 63 三角形的外心 125
圖 5- 64 橢圓軌跡 128
圖 5- 65 雙曲線軌跡 128
圖 5- 66 完全三邊形 129
圖 5- 67 腎臟線 136
圖 5- 68 定理繪圖 137
圖 5- 69 極性圖繪製 137
圖 5- 70 平行關係說明 138
圖 5- 71 對偶作圖 140
圖 5- 72 曲線變換作圖 141

圖 5- 73 點線對應推理 143

圖 6- 1 論文架構 158

表 目 錄

表 1- 1 民國 57 年至民國 108 年訂頒的國民中學數學課程目標 2
表 1- 2 講述法與討論法的差異 9
表 1- 3 歐氏幾何與投影幾何的比較 11
表 1- 4 資料編號對照表 14

表 2- 1 正多面體的組成 23
表 2- 2 圓錐曲線在傳統幾何與解析幾何定義敘述的比較 30
表 2- 3 物體移動位置-時間關係 33

表 3- 1 三種幾何的概念立基點 35
表 3- 2 曲率 45

表 4- 1 意志、情感、思考與生命七年發展的關係 63
表 4- 2 對稱性美感 75

表 5- 1 投影幾何課程進度與五大目的對照表 83
表 5- 2 不同觀點下圓錐曲線的關係 85
表 5- 3 每日課程節奏 127
表 5- 4 美感體驗（第三週課程有大量作圖時間，取消美感體驗） 127
表 5- 5 課程評量指標 134
表 5- 6 六個班三面向等級的人數 147


國立東華大學
NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

第一章　緒論

投影幾何是一門沒有包含在高中數學課程的主題，而 17 世紀就已經有研究紀錄也建立了相關理論基礎的主題，現今高中的數學教育著重在解析幾何及其之後的延伸發展，在幾何學的廣度方面顯得比較單一，然而對照 108 課綱在數學上的理念及目標，投影幾何有非常多的面向與之契合，它能讓學生用基本的點、線觀念拓展創造圖形，並擴大視野重新看待幾何學的定義；從各種關係及圖形引發好奇心，培養出觀察規律、演算、抽象、推論、溝通、數學表述、思考問題、分析問題和解決問題等各項能力；藉由使用作圖工具，輔以頭腦自由想像得到最有感的學習經驗，繪製精美的圖形，不僅是外在的圖形繪製，更有內在思考過後的美感經驗；讓學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。本文試圖從研究背景、文獻探討，找出理論架構，並從課程設計與實施過程中，研究得出實際可行的方式，培育學生自由想像的數學素養。

第一節 研究背景與目的

以下就臺灣的歷年課綱及華德福教育理念分成課程目標、課程內容及教學方式三大項目做背景說明，並依此列出四個研究目的。

壹、研究背景

整體性的教育目標及理想願景是教育工作者會一直放在心上的重要課題，當學生自進入學校，以一定比重的學習節數奠基數學能力，待高中畢業後，將有一大部分的人不會再修習數學相關課程，所以數學課程應該培養學生具備哪些在未來各領域可以遷移運用的基本能力，讓學生鍛鍊並養成理性思維的習慣，從中形塑出數學素養，是現場教育工作者需要一直嘗試探索的，而課綱是現場教育工作者依循的方針，也依時代背景的不同歷經多次的演變。本文開頭嘗試釐清各時期數學教育目標的演進，從課綱的轉變過程中，探索符合當代數學教育所訂頒的理想目標，主要著重數學在幾何方面的概念所呈現的樣貌，探問各時期是否提供了足夠的視野讓學生們認識這個世界，是否建立了學生們的基本素養以便能符合未來趨勢的思維模式。另外介紹華德福教育理念下的幾何課程，並以投影幾何這門課為主軸，自課程理念與目標、課程的設計與內容、實際授課情況、學生的評量與回饋，來對照主流教育與華德福教育之間的異同，藉以探討其中有哪些值得相互參照之處。

一、數學教育的課程目標

我國數學教育，國中階段在民國 57 年、61 年、82 年、89 年、92 年、97 年，高中在 61 年、72 年、84 年、93 年、95 年、99 年、103 年分別都有大小不一的改

革，而中學課程內容幾乎都是開始於負數觀念的建立，結束在 12 年級高中畢業時介紹完影響當代相當重要的微積分。以下列出從民國 57 年實施九年國民義務教育所訂頒的「國民中（小）學暫行課程標準」開始，到 108 課綱實施的這 50 多年來國內數學課程目標的演進，並針對其中幾次比較重大數學教育目標的演進做初步比較。

表 1- 1 民國 57 年至民國 108 年訂頒的國民中學數學課程目標

公布時間	訂頒名稱	課程目標
民國 57 年	國民中（小）學暫行課程標準	1. 使學生了解數與形之性質及關係，並熟悉運算之原則與方法。 2. 供給學生日常生活中數量之知識，並啟發其研究自然環境中之數量問題。 3. 訓練學生關於簡單計算及基本作圖之技能，使有準確迅速及精密整潔之習慣。 4. 培養學生以簡御繁，由已知推未知之能力。 5. 使學生認識數學之特質，並欣賞其應用價值。
民國 61 年	國民中學數學課程標準	1. 使學生了解數與形之性質及關係，並培養其對「空間」、「函數」的直觀概念。 2. 訓練學生關於計算查表及基本作圖的技能。 3. 培養學生以簡御繁，由已知推未知之能力。 4. 供給學生日常生活中數量的認識，使其認識數學的應用價值，並啟發其研究自然環境中數量問題的興趣。
民國 74 年	國民中學數學課程標準	1. 引導學生認識數學的功用，以提高學習的興趣。 2. 輔導學生獲得數、量、形的基本知識與技能，以為日後研究的基礎。 3. 培養學生運用數學方法，解決日常生活中數量問題的習慣與能力。 4. 啟發學生思考、推理與創造的能力。 5. 配合教育輔導，鑑別與試探學生數學的能力。
民國 83 年	國民中學數學課程標準	1. 引導學生認識數學在生活中的功用，以提高學習的興趣。 2. 輔導學生獲得數、量、形的基本知識與技能，以提升數學素養。 3. 培養學生運用數學方法解決問題的習慣與能力。

		4. 啟發學生思考、推理與創造的能力。 5. 培養學生主動學習的態度及欣賞數學的能力。
民國 93 年	國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域	1. 培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力。 2. 學習應用問題的解題方法。 3. 奠定下一階段的數學基礎。 4. 培養欣賞數學的態度及能力。
民國 99 年	普通高級中學課程綱要	1. 培養學生具備以數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。 2. 培養學生具備實際生活應用和學習相關學科所需的數學知能。 3. 培養學生欣賞數學內涵中以簡馭繁的精神和結構嚴謹完美的特質。
民國 108 年	十二年國教—數學領域	1. 提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度。 2. 培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。 3. 培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度。 4. 培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。 5. 培養日常生活應用與學習其他領域/科目所需的數學知能。 6. 培養學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。

資料來源：整理自鄭章華等六人（2018：142-144 ）、教育部（2001：4）、教育部（2008：43）、教育部（2009：3）、教育部（2018：3）

民國 57 年所訂頒的「國民中（小）學暫行課程標準」受當時美國企圖以「新數學運動[1]」追上激烈科學競賽的影響，以「集合論」為基礎，純演繹的方式編寫數學教材，關注嚴密的邏輯抽象推理，有「**注重公設系統與邏輯推理的形式**」、「**對於名詞的界定與符號的使用甚為嚴謹**」等特色，因為過於將數學抽象化，所

[1] 新數學運動，因為蘇聯在 1957 年發送第一顆人造衛星進入太空，而令美國感受到培育科技人材的迫切，認為需要徹底加強人民的數學能力，經過三年的課程研發，於 1960 發起的數學改革。世界上多個國家也在之後跟隨美國的腳步進行改革。

以在 61 年即提出修訂版（陳玟樺，2019：76, 78），此時的數學教育方式注重知識的傳遞、數學技能的養成、熟練計算來達到有效率的解題，雖然已開始強調數學的特質，但以應用為主，是一種試圖訓練學生成為科學家、數學家的菁英教育模式。民國 74 年訂頒的課程標準，注重學生自身在日常生活中會需要用到的知識和技能，以實用為主要方向。接下來的階段，教育主張以學生為主體，依據學生的自身經驗堆疊建構出更深一層的知識，強調學生帶得走的基本能力，並且開放課程，接受多元觀點（鄭章華等六人，2018：34-36）。

與臺灣鄰近的香港在 1960 年新數學運動之後，也在幾何方面進行多次的課程討論及本質性的改革。1960 年之前以演繹幾何建立幾何基礎知識，1960～1990 年嘗試動手幾何、功用幾何建立幾何基礎知識，來淡化演繹幾何的傳統教學模式，1990 年再次重視演繹幾何，並輔以動手幾何、功用幾何及空間想像力來幫助學生建立幾何相關概念。這種改革的幾何教學目標，主要放在建立學生嚴謹的邏輯推論，以演繹幾何為最終目的，而完成這目標的起點，香港嘗試過以 SMSG 公設系統[2]取代歐幾里德的定義、公設與公理；也試過讓學生直觀的認識圖形，用實驗幾何的方式進行一開始的教學。在過程中，輔助學生學會推理工具[3]的運用、利用尺規作圖深化幾何思維的能力、輔以互動幾何平台探索幾何圖形變與不變的性質。讓學生最後能掌握演繹幾何論證的嚴謹性及邏輯性。這時期的數學幾何教育目標，是以邏輯演繹為主，認為學生在高中以前需要具備良好的基礎數學能力，以便能夠銜接大學課程，能應付往後每一個階段的學習。（張家麟；黃毅英；林智中，2010：16）

臺灣於 90 年試行，93 年全面實施的九年一貫課程，數學領域有三個基本理念：

1. 數學是人類最重要的資產之一，自身亦呈現一種獨特的美感。
2. 數學是一種語言，是理性與自然界對話時最自然的語言。
3. 數學是人類天賦本能的延伸，具體化數學知識，形成更有力量的思維能力。（教育部，2001：1）

從上述的理念及同年訂頒的總體目標中之第 4 點（表 1-1），已經相對跳脫原有的窠臼，朝美感、欣賞的方向前進，不再只是強調能力的養成，其中也提到「人類是先由應用、操作、實踐中，認識各種幾何要素與性質，彼此之間並沒有一定的先後關係。歐氏幾何的價值，首先是對這些先民知識的歸類與整理，其次

[2] SMSG 公設系統：不定義名詞，而給出 22 條公設，如公設 1. 給定相異的兩點，恰有唯一的直線穿過該兩點。

[3] 這邊的推理工具，指的是學會如何證明，知道怎樣才算證明結束；懂得利用反證法來做證明；掌握邏輯推理的能力。

才是作為知識典範的演繹系統」（教育部，2001：73）。可以感受到對歐氏幾何的價值已有跳脫以往的認知，能欣賞幾何中最純粹的美，而不是只有應用而已。關於幾何的知識，強調對稱性與相似性，由直觀、歸納轉入幾何推理與證明，著重在幾何學本身的核心觀念，超越於形式的證明之上，在幾次的數學教育改革當中，本質上是企圖嘗試突破過往框架的。但九年一貫的實施，在數學領域方面，因為崇高的理念未能與現場實務相配合，導致快速降溫而被取代。

而從高中 99 課綱的數學目標中，可以看出這次的課綱修改強調數學清晰性，能用簡單的模式駕馭繁雜的事物，著重在整體的歸納思維，突顯數學的普遍與本質，主要目標是放在銜接大學課程的內容，因此在高中階段盡力給予基礎的數學能力，對於數學的美感與欣賞也就無法再兼顧了。（袁 媛等四位，2015：5, 6）。從 99 課綱到 108 課綱之間又有微調，但因為幅度不大，在此不多做說明。而現行的 108 課綱強調素養，有五個基本理念：

1. 數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習。
2. 數學是一種實用的規律科學，教學宜重視跨領域的統整。
3. 數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感。
4. 數學應提供每位學生有感的學習機會。
5. 數學教學應培養學生正確使用工具的素養。（教育部，2018：1, 2）

五項基本理念的前四項與六個課程目標（表 1-1）中的第 1 及第 6 項是很難在考試導向的教學方式下完成，但課綱願意放進這樣崇高的理念與目標著實令人雀躍，畢竟多年的教育體制，總是忽略了數學的美感，缺少了欣賞。好比美術、音樂等藝術，我們不能要求大家成為藝術家，卻可以提高孩子們的素質，學會欣賞。如果美術是視覺的藝術、音樂是聽覺的藝術，那數學就是思考的藝術了。

整體教育除了在不同時期有著課綱目標的演變，過程中也開始接受不同教育理念的發展，並於 103 年 11 月公布「高級中等以下教育階段非學校型態實驗教育實施條例」、「學校型態實驗教育實施條例」、以及「公立國民小學及國民中學委託私人辦理條例」，也就是俗稱的教育三法。開啟了教育上的多元觀點，以下僅就華德福的理念稍作闡述。

華德福教育依據著人的發展脈絡來設計課程，也就是課程的面向與進程將呼應著幼兒直至十二年級（高三）青年一路以來在意志、情感、思考三方面的發展，同時也依循著人類長久以來的發展史，因而在課程的規劃上，每個領域的歷史脈絡如何呈現也會是重點方向。九～十二年級的學生來到了發展「思考」的重要時機，華德福學校創辦人史代納博士曾說：「思考滲入每件事物與萬物合而為一」。而《與數學真實相遇》一書的作者 Ron Jarman 整理出人在思考的發展與強化的過程中可以分成四個階段，四個階段又可以分別對應九～十二年級的學習歷

程，舉例而言，十一年級的學習會是以「分析」為最主要的重點，同時強調自我思辨後的判斷，所以在數學中介紹投影幾何及微分，因為前者涉及無限遠處的思辨，而後者則是必須趨向無限小，兩者都需要透過內在的想像用理性的思維探索無限發生的事。投影幾何還提到「對偶」，此性質顯示出一個重要性，一個由點為基本單位開始建構出線、平面、空間的模式，同樣可以調整思考脈絡，重新以一個整體觀的空間存在，線由平面相交而形成，點則是兩線相交而得到，為此時的高中生給出不同視角看待事情的可能性。對柏拉圖來說，幾何學的重要性不在於本身可能帶來的實際用途，而是在於作為一種人類得以從中獲得知識與智慧的訓練方法。投影幾何在歐氏幾何的基礎架構下，為平行線交點存在於無限遠的可能性提出新的想法，重新為過往所學帶進積極主動的思考，嘗試給出重要且深具突破性的觀點，這是華德福教育有別於現行遵照 108 課綱體制在數學教育上的不同課程內容。是為十一年級學生發展思考的重要契機，在這過程中，學生會經歷由外在感官的經驗撞擊內在的思考，甚至是只能利用腦中的想像，運用理性做邏輯推理，畢竟無限遠是一個不可能到達的地方，在原有認知被劇烈衝撞、懷疑及拉扯之後，形成新的觀點或保持開放，當然也可能繼續懷疑這種觀點的正確性。將智能重新再次精雕細琢，培養學生對生命中純理性面的覺察。這也是 108 課綱以素養為導向的教學中，期待引導學生在數學領域中創告出品嘗美感的契機，或者也可以說是透由思考產生的美感經驗。（李心儀；劉雲英；謝叔樺合譯，2004：260, 261）

數學需要思考，如何不經由考試為導向來啟動學生內在積極主動的意願來思考，是數學教育中很重要的一環。一種經由自己思考過後、內化成為自己的信念，並且以此為依據，而不是僅僅以習得的外在知識為依據的思考行為，能夠使人的內心更獨立，更確認判斷時背後的立論基礎。數學教育的任務就是以此為依據。華德福學校的教學計畫也是建立在這之上。（鄧麗君；廖玉儀合譯，2007：82）

二、數學幾何教育的課程內容

從民國 57 年的暫行課綱到 93 年九年一貫課程全面實施之前，我國在數學的教育目標是以運算、推理、應用、連結的能力為主，雖有提及「鑑賞」，但還是以傳遞知識並熟悉其應用為主，談論各種基本幾何關係時大多直接以數學名詞來命名該單元標題，例如：點、線、多邊形…等平面關係的單元標題為「平面幾何圖形」、「全等三角形」。而民國 93 年之後，課程內容的編排強調生活化，甚至放進單元名稱之中，改用「生活中的幾何圖形」稱呼，但在幾何的相關內容上依然是沒有脫離歐幾里德《幾何原本》的邏輯演繹。人類在幾何觀點上，自古希臘時期以來，《幾何原本》就是一直主導著人們對幾何知識的建構，數學教育在幾何

的相關領域，一直是以歐氏幾何的觀點進行編寫，並在國中開始搭配 17 世紀勒內·笛卡爾（Rene Descartes 1596～1650）解析幾何的思路進行教學。截至目前為止歷屆課綱的內容名稱，雖然各時期名稱略有不同，但整體上，內容的差異性並不是太大，僅在單元順序的編排上做調整，若純以國高中六年的整體內容來看，主要都是為了讓學生有效學會各種知識以便具足銜接大學課程內容的基礎能力。現行課程內容的名稱在中學時期與歐氏幾何相關的單元有：生活中的平面幾何圖形、立體圖形、畢氏定理、三角形的基本性質、平行與四邊形、相似形、圓、推理證明、尺規作圖與三角形的心；而解析幾何及其延伸的相關單元包含直角坐標與二元一次方程式的圖形、函數及其圖形、二次函數、直線方程式及其圖形、圓方程式、圓與直線的關係、多項式函數的圖形、指數與對數函數、三角函數、二次曲線、極限與函數。直到高中結束，最深入的數學單元停在介紹基本的微積分概念。（鄭章華等六人，2018：157-159, 237, 238）

歐氏幾何的觀點從國小階段一直延伸至國三，內容大致介紹《幾何原本》前六卷的部分內容，並在國中階段簡單介紹解析幾何及函數的先備基礎概念，再於高中進行比較深入的探索。至於為何是在這樣的架構下進行教學，從歷年來的課程目標中可以看見，是為了培育學生們掌握理性思維的嚴謹性及邏輯演繹的重要性，而最能詮釋這種精神的書籍，當推《幾何原本》。大學前的幾何教學都在歐氏幾何的範疇下，並以解析幾何引導函數關係的探索。但幾何的發展絕不僅止於此，與笛卡爾同時期已經有了笛沙格的投影幾何[4]、後續還有羅巴切夫斯基的雙曲幾何、黎曼的橢圓幾何，而近代的拓撲學、弦論也在持續的發展中，這些幾何觀點雖然還不是教育主流，卻是值得提出來討論的內容。從課綱的演進過程，可以察覺到理念的轉變，但從未提及不同於歐氏幾何學的觀點，當有一群人在高中畢業後即將遠離數學，我們的數學幾何教育目標是否適合在此處嘎然而止，讓幾何的觀點就此停住呢？抑或是應該給出更開闊的視野，引領學生們擁有不一樣的思維，並在看待事物的同時，不斷檢視自己思考的立基點，讓學生保有更自由的判斷空間。

三、數學幾何教育的教學方式

歷年的課綱或多或少都有交代呼應課程目標的教學方式，尤其在實施九年一貫時，因為是一個大改革，其中更是鉅細靡遺的交代各年段每個單元內容的教學細目。現場的教學方式區分成講述法、遊戲式數學、建構式數學…等等，甚至是現在流行的翻轉式教育，而這部分的細項探索及分類已經有多位學者進行探索，本文並未深入探索，僅就教學現場的兩種教學方式「講述法」及「歸納法」進行

[4] 投影幾何：國內書籍文獻多數以「射影幾何」稱之，但從英文名稱 Projective Geometry 及其相關內容，本文還是以「投影幾何」稱呼，以求貼近一般的讀者。

比較，並給出四個教學步驟。

約在 14 世紀歐洲開始了文藝復興，強調科學的理性思維，更在 16 世紀笛卡爾出現後，讓理性主義成為一股主流，認為感觀直覺不夠客觀，必須讓「感覺聽從思維」才夠客觀（林逢祺，2015：3）。因此，需要用理性來獲得絕對的真理也就順理成章成為教育制度下的主流。而理性思維、邏輯演繹也一直是各時期課綱在數學領域的重要目標，直到 99 課綱才提及整體「歸納」的重要性。講述法及討論法兩種不同的教學方式，在學生的學習模式上有會產生不同的影響。以下為兩種方法稍作說明。

1. 講述法

從單元的定義介紹出發，然後推導公式，再進行基本題型的練習，接著大量與之前學過的單元做連結，進行進階題型的練習，藉由介紹數學史讓學生看見人類發現概念的脈絡；或利用科技輔助教學，從各種面向引起學生的興趣，過程中老師教授其關係性，以學生精熟相關概念為目標來進行教學。這樣的教學模式，有兩個重要的特點：

(1) 像數學邏輯證明式的推敲下一個步驟，每個人都可以得到相同的結果。
(2) 在「正確」的前提下，小心求證，保持每一步驟正確無誤，必然得到正確的結果。

以此方式努力找出所有問題的正確答案，並有系統的培育下一代，是一種可以相對快速養成的教學模式。但其中有一點非常值得我們深思，前提的正確性，如何斷定呢？又該以哪一種方式給出觀點的立基點？（邱心柔譯，2018：76）

2. 討論法

給出一個命題讓學生從中觀察，從過往的知識背景中，找到蛛絲馬跡來發現關係，統整大家的發現找出共同特性，再總結出精要的結論，再試著定義出每一個概念的名稱。換句話說，透過題目的演算找到統一的規則性，建立一個新的公式，並在新公式的堆疊下，建立起整個概念所需的架構，為其建立一個簡單且完整的定義，養成對整個概念的掌握。這樣的模式與人類形成各項觀念的歷史脈絡雷同，讓學生親身經歷整個人類發展出該項觀念的歷史軌跡，對於培養出學生們的數學觀，以宏觀的數學素養看待自己所學會有很大的幫助。討論法，從眾多現象中，找到共通性，然後得出一個「暫時」的結論，再透過不斷觀察與修正，得到進一步的暫時性結論，讓世界往前邁進。

以下簡略統整講述法及討論法在數學教育上的差異，如表 1-2

表 1- 2 講述法與討論法的差異

教學順序	講述法	討論法
1.	給出定義	題目演練
2.	推導公式	找到共通性，猜想公式
3.	題目演練	統整定義

資料來源：研究者整理

華德福學校的課表安排有「主題課程」（main lesson）的設計，一個主題進行三週，每天 120 分鐘，讓學生在同一時期能深度沉浸在相同主題的氛圍之中，每天的課程節奏從晨間活動開始，藉此喚醒尚處於沉睡中的學生，讓學生盡快進入上課的氛圍；華德福學校強調經過晚上的睡眠，讓潛意識在此時留下思考的痕跡，所以在晨間活動之後，進行前一天課程進度後的概念回顧，全班一起分享討論，偶爾會視學生狀態、或內容的難易度先進行小組分享，讓學生重複思索尚未內化的新概念；接著給出時間讓學生書寫屬於自己的工作本，再次自我沉澱所聽到的概念，為自己做出統整並留下記錄；之後再進行老師當天的進度安排。

從上述的研究背景中，我們在歷年來的課程理念及目標演進中，可以看出漸漸朝學習者為主體，強調知覺和行動為學生創造出有感的課堂學習，甚至是自主且終身的學習態度，不再是菁英式的培養數學專家，而是鼓勵全民性的多元參與（鄭章華等六人，2018：560），注重的是人與世界的整體觀，看見整體性的美感教育，課程目標算是有大幅度的演進。至於內容上，則並未有太大的調整，雖然強調與日常生活的連結，引進數學史要求貼近人類發展的脈絡，但就知識而言並未有大幅度的更動。而數學教育首重思考，思考不一定只是理性的邏輯推理，也可以從知覺出發，再建立起有邏輯的立論架構，所有理論的立基點都是可以拿出來檢視，在幾何的世界中，《幾何原本》不證自明的立基點也可以重新定義，這是一種高度的自由與懷疑。如果教育方式，還是停留在想要教會學生們各種觀念，強調學會各種知識，並沒有讓學生們體會到當時學者為何會出現各種觀點的思維脈絡，是一種被強迫式的學習，缺少了自由想像的空間。如果我們可以引領學生嚐到思考立基點的起因，將那特別的體會交還給學習者本身，重新檢視幾何思考立基點的關鍵之處，而這個關鍵之處是講述式的給予學生，抑或是給出各種可能性，由學習者從中歸納得出，是我們教學工作者值得深思的。

貳、研究目的

依據上述的研究背景，本文的研究目的有四個：

1. 描述歐氏幾何的起源與發展。
2. 說明近代幾何的起源與發展。
3. 分析投影幾何課程設計的理論基礎。

4. 探討投影幾何課程的設計與實施。

第二節 研究方法與範圍

根據前述的研究背景與目的，以理論分析及行動研究兩方面來說明本研究的方法與範圍。

壹、理論分析

一、蒐集幾何發展與教育的相關資料…

在幾何發展的過程中，歐幾里德的《幾何原本》一直有著舉足輕重的地位，但其原著早已失傳，本文以藍紀正、朱恩寬翻譯，陝西科學技術出版的《幾何原本》（Elements）為基礎資料確認《幾何原本》中的內容，而當時的歷史背景主要參閱 J.Katz 所著的《A History of Mathematics》，以確認歐氏幾何與邏輯演繹的相關性。投影幾何的選材上，一開始希望整理出有關笛沙格的生平背景及其哲學思想，但因為他是法國人，且當時並不是太有名，找不到太多英文的文獻，所以選擇《The Geometrical Work Of Girard Desargues》為參考資料，並以有華德福教育背景作者所撰寫的《Topics in Mathematics》為主要參閱書籍，除了考量到內容，也是希望與華德福教育有更多的連結。非歐幾何相較於 17 世紀之前的幾何顯得比較艱深，並不容易理解，所以參考洪萬生教授及國外學者 Eli Maor、Robert Osserman 等所撰寫或推薦的相關科普書籍。美感教育理論的選材，參考康德被翻譯的作品《判斷力上、下卷》及《西方美學史》找出美感的基礎理論，加入史代納關於想像的觀點，以《Imagination Enhancing the Powers of Thinking》一書釐清不同於傳統對想像的思維，另外輔以其所著的《自由的哲學》，確定自由的本質及如何培養成為自身的一種能力，並從《人的普遍智識》中得到關於人的發展所需注意的各種面向。數學教育方面，主要參閱《一個數學家的嘆息》（A Mathematician’s Lament）、《GODEL, ESCHER, BACH》及《怎樣解題》（How to Solve It）探討數學中最本質性的概念，歸納出不同領域與數學相關的特性，及培養思考的方式。

二、分析、比對及歸納資料

在不同的立基點下，會延伸出不一樣的幾何內容，數學家在發現新事物的過程以至於提出理論，會受當時的歷史背景、自我生命史與背後的中心思想影響其看事情的角度，形成重要信念。在比對「歐氏幾何」與「投影幾何」的內容（表 1-3）過程中，探討差異的來源，概念形成的背後影響因子，從中歸納出不同幾何觀點所帶來的價值。

表 1- 3 歐氏幾何與投影幾何的比較

	歐氏幾何	投影幾何
無限	無限時的關係視為特例	無限時的關係視為一般性
量	注意各種元素，量的大小 例如：角度、長度…	不管量的大小，注重彼此間的關係
細節/整體	一一看待每個例子	注重整體，強調連續性
經驗/思考	理想的單一平面，以感官經驗為前提做理性思考	跳脫感官做理性思考
其他		強調對偶性

資料來源：研究者整理

三、聚焦，探詢投影幾何與美感及數學教育的相關性

華德福學校的創辦人史代納博士，在 1919 年開辦的學校老師會議時曾提及：投影幾何對想像空間充滿了巨大的挑戰，為自己從內心深處發出一種想像力，一種自我得以突破，卻又極度自由的模式再次學習幾何，體驗幾何帶來的歡樂。而傳統上，歐氏幾何已經確立了邏輯演繹的重要性，但自由想像的能力比較少被提及，本論文將資料分析、比對後，以美感教育與數學教育兩大方向來建立理論基礎，設計投影幾何課程與教學方法，培育學生擁有自由想像的數學素養。

貳、行動研究

一、研究流程與研究架構

在確定論文題目之前，研究者就非常熱愛投影幾何的博大精深，總覺得在幾何的學習過程中，不僅要學習邏輯推理，更需要有自由想像的能力，透過定理的繪圖與極性圖的繪製過程感受線的交點會在紙張範圍之外，想像紙張外的邏輯關係，思考著在相同邏輯下如何形成同樣的結果。依著這個大前提，視首次準備投影幾何課程到決定論文方向為第一個時期，時間約略為 2019 年九月至 2021 九月，參考相關文獻，設計十個單元的課程，實際教學，收集學生的心得回饋，再進行課程修正，並於兩年期間，進行兩次的循環。如圖 1-1。在這段期間，學生對無限遠點及跨過無限遠處的三角形並不是很能接受，是抱持著聽聽老師怎麼談論相關論點，處於一種被動的接受狀態。

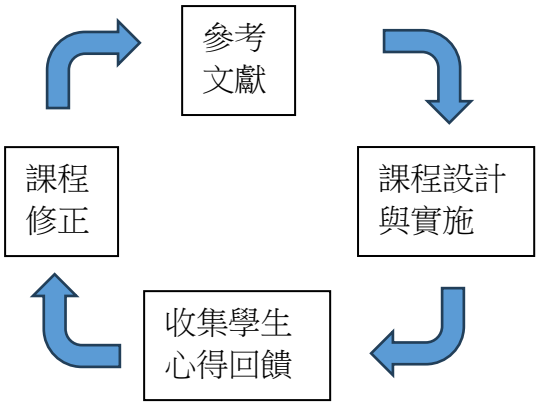


圖 1- 1 第一期循環圖

資料來源：研究這自行整理

第二個時期為 2021 年九月到 2023 年四月，研究者在確定論文方向後，在文獻上將範圍放在數學史中關於幾何方面的發展，以及數學家們的背後信念，重新設計成十二個單元的課程內容，進行一年中兩個班的實際教學，在這段期間，為因應第一時期遇到的問題，在課程一開始加入投影三角形的觀念，多數學生相對比較能進入觀念的探索，更具自由想像的狀態，並在課程最後觀賞曲線變換的連續性，為無限遠處的連續性再做一次統整，更完備關係的整體性。這時期同樣在上課觀察後留下紀錄，收集學生的心得回饋，並彙整指導教授及口試委員在計畫口試時所給予的意見，再次修正課程。

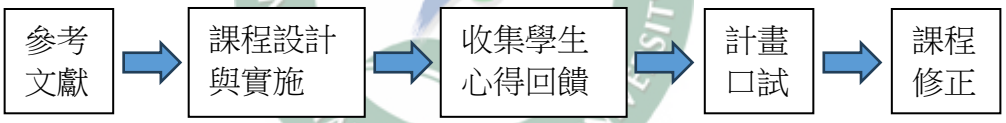


圖 1- 2 第二期流程圖

資料來源：研究這自行整理

第三個時期為 2023 年四月到 2024 年四月，研究者參考更多的文獻，並在暑假時與全台華德福老師們進行聯合備課，經由前兩個時期的經驗，與不同老師們的觀點，透過三個全天的討論，確認出課程五大目的的方向，維持十二個單元的課程架構，但微調教學內容，同時設計出美感體驗的活動內容，輔助學生能更快速的投入課程之中。這階段共進行兩個班的教學，在課堂教學時，所有定理以更「自由」的方式給予，並不刻意將定理的關係呈現在黑板上，保有線的交點超出黑板的可能狀況，以老師上課時的內在自由，影響學生在過程中的自由；學習評量上，主要是依據學生的上課參與度、工作本及課程內容評析，在此三個時期結束後，將收集到的學生文件進行編碼，與指導教授討論出 11 項評量指標，重新對所有的班級進行一次總評量，確認課程目的的達到成效，最後進行整體性的研究省思，得出結論與建議。

二、研究場域與研究參與者

1. 研究場域

本研究的場域為宜蘭縣冬山鄉的慈心華德福高中，是一所完全中學，小學每年級三個班、國中每年級四個班、高中每年級二個班，共 36 個班。是華語區第一所華德福學校，以公辦民營方式辦學的實驗學校，迄 2024 年是華德福教育總部歌德館認可的臺灣三所華德福學校的其中一所。

2. 研究參與者

(1) 研究者

研究者會來到華德福體系學校的其中一個主要原因是，多年前對數學漸漸失去熱情，在偶然的機緣下接觸到投影幾何，被它那全觀性視角，探索本質性的美所深深吸引，想要一窺它的全貌，毅然決然地於 2016 年決定進入慈心華德福高中任教。在慈心高中擔任過一輪高中導師、一年七年級導師，三年數學專任老師，有四年共六個班投影幾何的教學經驗，過程中不斷的跟學生一起成長，從本質上思考著一個高中生應該具備的數學素養。研究者同時有教學與研究兩種身分，研讀文獻，規劃課程，實際教學，觀察學生的學習表現及態度，省思整體過程的優缺之處，改進課程保有良好的教學品質。

(2) 研究對象

研究對象為慈心高中 11 年級的學生，107 學年 32 人，108 學年 31 人，110 學年 A 班 23 人、B 班 24 人，111 學年 A 班 22 人、B 班 21 人。一般體制內的高中，在入學前以術科與學科分數編入不同學校，做清楚的分流，有各類藝能班、職業類科及普通高中，而華德福的一班高中與此不同。慈心高中生大部分都是慈心國中透過優先免試入學高中，集結具各項特質與能力潛能的學生，是完全的常態分班，並未提早分流與固化，此外，他們一進華德福學校便一路同班到九年級，雖然十年級時會重新打散編成兩班，但有些同學自幼兒園就一路同班到高中畢業。歷屆高中招生中，107 學年度報名人數超過錄取人數十多人，此班有著良好的學習態度，也都能按時完成老師交代的事項，或許也因此，在學習上比較緊繃，比較怕犯錯而缺少了自由度。

三、研究工具

1. 教學紀錄表：

研究者自製教學紀錄表，包括日期、出席名單、單元名稱、內容大綱、教學過程、學生疑惑、教學問題、當時對應策略、可能解決策略、客觀觀察、自我省思。主要是預備當天教學所需，客觀紀錄發生事實，檢討省思再精進之處。

2. 學生作品

在課程進行期間，每天都會在課堂上作圖，透過作圖看見學生的學習表現及態度，是隔天教學難易度的依據，也是評斷學生是否理解課程概念的重要依據。

3. 學生工作本[5]

每天均會保留時間讓學生在課堂上書寫工作本，為自己統整當下的學習，給予適量的回家作業，讓學生持續保有思考，要求把課堂內容、自我想法、嘗試解決的方式，大家共同分享討論而形成的概念等等任何願意寫下來的內容，都用自己的語言書寫進工作本。

4. 學生心得回饋

於課程結束後，用心得回饋替代測驗，內容上分為三個面向，首先是投影幾何內容的評析，是心得回饋中最主要的部份；其次是對老師上課方式給予回饋，至少優、缺點各一；最後是評價自己上課期間的整體表現。

5. 量化及質性評量資料

每次課程結束會給予學生量化及質性評量，但 107 及 108 學年度並未留下學生的心得回饋，相較其它四個班，這部分資料在分析這兩年學生的學習狀態時，比起另外四個班來得重要許多。

6. 資料編碼

本研究的質性資料編碼如表 1-4：

表 1- 4 資料編號對照表

資料來源	資料編號	說明
學生工作本	工-107-1	指 107 學年學生 1 的工作本內容
學生工作本	工-110A-1	指 110 學年 A 班學生 1 的工作本內容
學生心得回饋	心-108-1	指 108 學年學生 1 的心得回饋

資料來源：研究者整理

四、三角檢核與研究倫理

在資料方面，採用教學觀察紀錄、作圖、工作本書寫及心得回饋等進行資料

[5] 工作本，華德福學校檢視學生學習狀況的其中一種方式，類似筆記，但將內容更細膩且多元呈現的整理成手工書，相當於是一本專屬自己學習歷程的「課本」。

檢核；在觀察上，邀約老師在不同時間進班觀課，並訪問授過該課程老師的相關經驗；在方法上，採用觀察、訪談及資料蒐集進行多面向的檢核，以期能夠增加研究的真實性。

敝校是實驗學校，課程以華德福教育為基礎做深度及廣度的設計，家長及學生在入學之前都知道學校在相關方面的做法，以學生受教權為第一考量，均知情同意，在 110 及 111 兩個學年度的四個班，也都在課程開始的第一堂課告知本研究的目的、理念，採用匿名呈現學生作品，無損害學生權益，研究者遵守研究倫理的規範。

五、提出研究者的心得及建議

從目前累積出的教案、課堂上的實務活動、觀察學生的狀態、學生的工作本與心得回饋、課程結束後的評量，不斷省思這樣的課程是否夠充分，是否呼應華德福的教育精神，是否貼近 108 課綱的基本理念，是否還有哪些面向並未縝密考慮，是否令學生的內在產生美感經驗，是否給出足夠的數學素養，不斷檢視文本內容，不斷的修正，做整體分析與判讀，從中歸納出結論，提出建議供國內高中的數學教育做參考。

第三節 研究限制

根據前述的研究方法與範圍，說明本研究的限制如下：

壹、資料蒐集：

在資料的蒐集上，有兩點限制

1. 數學家相關的歷史背景及數學家的生命史太過龐大，本研究主要參閱《數學史通論》（A History of Mathematics），或以數學傳播季刊相關內容及科普書籍作為參考內容；課程發展的歷史沿革主要以教育部從民國 57 年的課綱到現行的 108 課綱為主；實驗教育的部分僅就華德福系統做探詢。關於數學家相關的學術研究論文，各時期課程目標依據何種理論訂定及華德福教育之外的其他教育模式，本文並未作深入研討。
2. 107 至 110 學年的教學，在期末評量完之後就將工作本發還給學生，只掃描保留兩位學生的工作本，以至於在做最後評量成果時，對於 B 等級的學生內容並未能夠更細膩的給出相關例子，以供後續課程討論、檢視之用，應掃描保留相關文件，盡力找出讓後段學生可以跟上的方法。

貳、個人能力

個人能力上有兩個限制：

1. 幾何是一個博大精深的領域，光非歐幾何[6]的觀念就有不同學派，現代又持續發展出新的幾何觀點，眾多的理論非筆者所擅長，本研究僅對投影幾何做課程設計，其他幾何的領域有待未來持續研讀精進，以便有更全觀的看見，讓整體圖像更完備。
2. 康德的思想並不容易讀透，需要釐清當時的時代背景、文化脈絡，並且熟悉他的哲學觀點，才能真正讀懂他對美學的思維，在此次對康德的研究上，尚未充分掌握，需要在往後的研讀中更加精進。

[6] 非歐幾何：否定歐氏幾何的第五公設，可分為橢圓幾何與雙曲幾何。

第二章 歐氏幾何的起源與發展

幾何的早期發展是以人類能接觸到的周遭環境為範圍，從眼睛可見、觸摸得到的現象中出發，憑藉著自身的感官經驗，依循著對空間相對關係的好奇而持續探索，進而建立抽象性、系統性及邏輯性的推導，提出各種定理並證明之。本章試圖探索數學家們是基於什麼樣的歷史脈絡與自己的生命經驗中，逐步建立起自己的信念，藉此進行研究而得出相關理論。第一節從古文明的幾何觀開始，探詢為何人類會以「邏輯演繹」為基礎方法尋找對所處環境現象的解釋理論，從單一定理的完整抽象證明，進入到理論的綜合應用，並以幾何學的全面使用作結尾。第二節從純幾何學的困境中，笛卡爾是如何能看見改變與精進的關鍵之處，而建立出解析幾何的概念，其中的價值又是如何影響幾何的發展。

第一節 歐氏幾何的起源：邏輯演繹

壹、邏輯演繹的特例—從古文明到古希臘

人類早從狩獵採集開始使用結繩記事，以方便「數量」的確認，歷經畜牧、農業時期，稱不上有任何的嚴謹研究。於現今捷克地區出土一根 7 吋長，有著許多刻畫切口的狼骨頭，據信是最早的印記，從後續發現的腓骨中，根據留在上頭的刻畫及排列方式，透露出當時的人類已經有了奇數、倍數（連永君，1979：18）。之後幾個比較具代表性的古文明陸續出現，古巴比倫在幾何方面的主要成就有 60 進位制，現在使用的時間及一個圓 360 度都沿用此概念；頗具盛名的「普林頓 322 號泥板」，則紀錄著直角三角形三邊長的平方特例（如$3^2+4^2=5^2$），以及各種畢氏三元數[7]（李文林等譯，2004：6, 26）。而古埃及著名的重要文獻資料有莫斯科紙草書卷（Moscow papyrus）及萊因德紙草書卷（Rhind papyrus），紀載著當時的埃及人住在尼羅河的河谷處，尼羅河幾乎每年都會氾濫，因而長年必須重新丈量土地，使得埃及人在幾何方面有突出的表現，他們能用 3、4、5 邊長比例關係的繩結，創造出直角三角形進行丈量；有非常精準的面積計算觀念，利用 $(\frac{8}{9}d)^2$ 得到圓面積的近似值（d 為直徑），相當於用 3.16 來代替 π（ 陸劍豪譯，2002：18）。

米勒都（Miletus）的泰利斯（Thales 約 600B.C）是公認的第一位古希臘哲學家兼數學家（傅佩榮譯，2004：21），留下相當多的幾何學知識，也是第一位使用演繹邏輯的幾何學家，其幾何方面的重要事蹟有下列四項：測量太陽光線對木棍及金字塔所形成的影子長度後，利用相似形有相同邊長比例的關係，推測出金

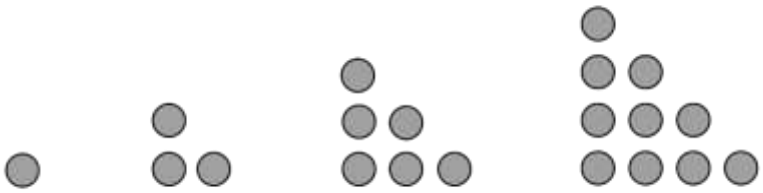
[7] 當直角三角形的三邊長均可以用「整數」呈現，符合$a^2+b^2=c^2$的關係，即稱此三數為畢氏三元數，例如：$3^2+4^2=5^2$，即稱 3、4、5 為一組畢氏三元數。

字塔的高度；成功的在 585 B.C. 預測日蝕的發生；證明出直徑所對的圓周角一定是直角；研究圖形經由平移、旋轉或翻轉而重疊的全等觀念（林聰源，2004：15, 16）。

古希臘是一段影響後世非常深遠的時期，對數學有著偉大的洞見，希臘人掌握到幾何的精髓，為人類開啟了一片浩瀚的幾何學，Stephen Bertman 在《希臘人為什麼有智慧》一書中總結出古希臘人的八大智慧：追求卓越、理性主義、源源不絕的好奇心，愛好自由、人本主義、行中庸之道、認識自我與個人主義（陳怡華譯，2009：目錄）。希臘人的幾何是一種純數學的形式，而其他地區的幾何學是為了應用而發展的（博佳佳，2020：30）。這一段長時間的演進，出現了好幾個不同的概念，彼此之間可能有關，也可能毫無關係各自獨立發展，對關係的理解或許有給出解釋，但並不是非常嚴謹，通常只對單一特例做說明，例如：直角三角形的三邊長分別為 3、4、5 時，有著$3^2 + 4^2 = 5^2$的特殊關係。但畢氏定理就不一樣了，它是可以套用到所有的直角三角形，傳統上視畢達哥拉斯學派首先給出此定理的嚴謹證明。

貳、邏輯演繹的首度運用—畢達哥拉斯（Pythagoras 約 500 B.C.）

畢達哥拉斯學派受奧爾菲教派（Orphicism）的影響，主張靜默修持、音樂陶冶與數學研究，認為數學中存在著宇宙真理（傅佩榮譯，2004：38, 39），他們用單弦琴反覆的測試而找出了兩弦長的比若為 4：3 為四度音程、3：2 為五度音程、2：1 為八度音程，奠定了音程的基本關係（蔡聰明，1994：3）。畢氏學派以數字為基礎找到音樂中的和諧關係，也同樣用數字的關係尋找宇宙的和諧，比如三角形數、正方形數（圖 2-1），而兩個連續的三角形數可以構成正方形數，將數字的關係轉化成幾何形體表示。除了表象中的數量，畢氏學派認為在幾何學中，數字 1 代表點（1 個點）、2 代表線（2 點確定一直線）、3 代表平面（不共線 3 點確定一平面）、4 代表四面體（不共面 4 點形成四面體，也代表三度空間）（洪世民譯；2011：45）。還會以另一種型態看三角形數，圖 2-1 的數量為$1 + 2 + 3 + 4 = 10$，其中 4 代表礦物、植物、動物及人類的物質性；3 代表植物、動物及人類的生命力；2 代表動物及人類的意識心，1 代表人類獨有的自我意志（李心儀；劉雲英；謝叔樺合譯，2005：4），因為對數字深深的著迷，畢氏學派相信「萬物皆數」，認定所有可公度的量皆可用整數的比率關係呈現。



三角形數



正方形數

圖 2- 1 三角形數、正方形數

資料來源：研究者整理繪製

揚柏里古斯（Iamblichus 250-325A.D.）提到畢氏學派的誓約：

> 我對四重體的發現者立誓，那是我們一切智慧的泉源，自然之泉亙古不變的根。（洪世民譯，2011：44）

當時的時代背景及其神秘的宗教哲學思維深深地影響著畢氏學派的成員們，從各種紛亂的現象中找到一種清晰的明確關係，是畢氏學派不斷追求的目標，對於推理證明也提供了邏輯演繹的初步窺探，其中一個有名的定理，就稱為「畢氏定理」：

直角三角形中，兩短邊的平方和等於斜邊的平方（即$a^2+b^2=c^2$）



圖 2- 2 畢氏定理證明

資料來源：研究者整理自李心儀、劉雲英、謝叔樺（合譯）（2005：189）繪製

在圖 2-2 中，八個深淺不同的灰色三角形皆為形狀相同、大小相等的全等三角形，最短邊為 a，依序是 b，斜邊（最長邊）是 c，左右兩個大正方形的邊長皆為 $a+b$，還有兩個白色區域面積為a^2、b^2的正方形在左邊大正方形之中，而右邊大正方形另有一個白色區域面積為c^2的正方形，由邊長$a+b$的正方形扣掉四個三角形的面積，即可得出$a^2+b^2=c^2$。在不同的古文明中，對直角三角形三邊長的關係有特殊數字的獨立紀載，如古埃及文明已知三邊長若分別為 3、4、5，會有$3^2+4^2=5^2$的關係存在。但畢達哥拉斯學派為此定理給出邏輯性且一般性的幾何方式證明（周念縈譯，2017：42），a、b、c 可以代入任何數字，適用於任何直角三角形，而不是只提出特例的數字關係。在畢氏學派之前，幾何大致上只是一些經驗法則的匯集，規則之間並沒有清楚表明其中任何的相互關聯。身處 21 世紀，我們把「證明」視為是重要的核心精神，對提出定理並證明它是那麼的理所

當然，可能很難想像在數學推理出現前的原始狀態。

當畢氏學派奉「萬物皆數」為崇高的信仰時，卻出現了意外的插曲，他們發現直角△*ABC* 中（圖 2-3），若線段 *AB* 及線段 *AC* 都是 1 個單位長，所在邊的正方形面積會是 1 個平方單位，而下方大正方形面積會是 2 平方單位，那麼線段 *BC* 的長度會是多少呢？用現代數學語言表示為$\sqrt{2}$，是一個無理數，無法用整數的比率關係來表示。畢氏學派相信要用邏輯演繹的方式去尋找真理，同時有著「萬物皆數」的崇高信仰。但尋找真理的方法卻與核心教義相衝突！讓他們無法知道該相信哪一個？是尋找真的方法錯了，還是核心教義錯了呢？這是他們所遇到的最大危機。

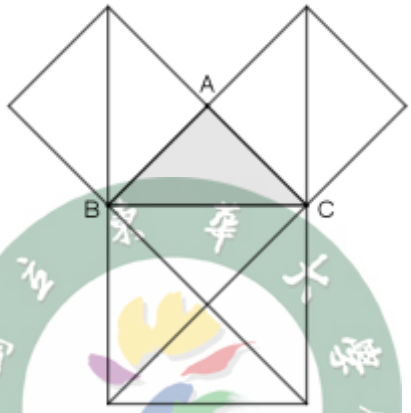


圖 2- 3 面積 2 平方單位的正方形邊長

資料來源：研究者整理繪製

傳統上認為他們拒絕承認無理數的存在，選擇隱藏這樣的發現來保護核心教義，限制門徒們不得對外發表相關看法，而不是重新調整他們的世界觀，用另一種更寬闊的世界觀來重新詮釋「萬物皆數」的概念，如果他們當時正視無理數的存在，相信會發現其信仰的五芒星符號中，線段長的黃金比率[8]也是一個無理數，他們覺得最美的比例關係，卻隱藏著他們拒絕承認的事實。一個信念的建立，支撐著人類持續探索的動機，卻也在某種程度下限制了往前探索的開放性，保有理性檢視思考源頭，確認信念的正確性或許是更高的指導原則。

畢氏學派為單一定理提出了嚴謹的證明，讓所有人都相信這樣的關係必定都存在於所有的直角三角形中，不會出現任何的例外，在不證自明、大家都能接受的觀念前提下，小心求證，保持每一步驟正確無誤，而得到一個正確無誤，每個

[8] 如圖，

P 點將線段$\overline{AB}$畫分成長邊$\overline{PA}$與短邊$\overline{PB}$，若$\overline{PA}:\overline{PB}=\overline{AB}:\overline{PA}$，即稱此比例關係為黃金比，其比值$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$。當時的希臘人認為這是最和諧、最美麗的比例關係。

人都可以得到的相同結果，這是一種邏輯演繹的展示。而這樣的理論，也為當時的人所接受，並開始運用，當然其運用的範圍不會僅在數學而已，柏拉圖可說是當時的重要學術導師，他不僅在數學上學習，更在多個領域深耕，提出的理論中也充分利用邏輯演繹來支撐。

叁、邏輯演繹建立理論—柏拉圖（Plato 428～348B.C.）

古希臘人對人類所處的世界是非常好奇的，也總是提出各項理論企圖解釋宇宙的組成，從最早的哲學家泰利斯提出萬物最初原質為「水」，以「一」的概念看待世界。身為泰利斯的助手安納齊曼德（Anaximander 610～546B.C.？）認為若萬物皆為水 ，世界應該早被水淹沒，必定還有一種「未加限定」的要素存在，會驅動萬物分化，提出世界由漩渦式運動所形成，有土跟水在中心、火在周圍、氣在中間，企圖以四種元素解釋世界如何發展而成。恩培多克立（Empedocles 490～430B.C.？）主張存有不變，有四種根本的物質，即土、水、火、氣，所有的萬物都是依此聚散分合形成的，後人對這四種元素的習慣分類也因此確定（傅佩榮譯，2004：29, 31, 32, 81, 82）。如果對畢達哥拉斯稍做回顧，他用兩個互補的面向看待數字，一種是有形體的物理存在，跟所有存在的實體一樣真實，另一種是無形的抽象原則，是數字的永恆本質，在這樣的架構下建立起數學的四元論（圖 2-4）（李心儀、劉雲英、謝叔樺合譯，2005：7）。而這些概念也深深的影響著柏拉圖。



圖 2- 4 數學四元論

資料來源：研究者整理自李心儀、劉雲英、謝叔樺（合譯）（2005：7）繪製

柏拉圖不算是數學家，比較像是一個崇尚數學的哲學家，他受畢氏學派的影響，認為知識不是感官知覺，必須建立在正確無誤與客觀真實兩個條件之下，知識不僅僅是真實判斷，也不是加上說明就可以，知識需要固定而且能恆常存在，並且需要合乎科學而做清晰的定義，相信抽象的永恆存在，各種理論，包含未被發現的各種概念都早已獨立存在，就連數字都有它代表的抽象意涵，也就是有一個超越本質的世界存在，是一個獨立於真實世界存在的理型世界，是萬物存在的

成因（傅佩榮譯，2004：193, 197, 199），而人類能做的就是去發現它。接下來的問題是：如何去發現它並確認為真，得到可靠且客觀的知識。換句話說就是以理型為源頭，並將它擴展到任何事物的推理論證，藉此探索者可以找出想像之外無法看見的對應物。而數學最符合他探索兩者之間的關聯，數學是追尋真理過程中可以確保無誤，也最接近真理的方式，他認為真正完美的圖形只存在理想的世界中，好比理想的圓、三角形…等等都只存在理型世界，而畫出來的圖形都有著或大或小的誤差。這個世界的數學特性會得到一個事實的必然結果—「上帝永遠進行幾何化工程」。（洪世民譯，2011：62, 63）

在柏拉圖的眾多學說中，跟幾何學最有相關的，莫過於五個正多面體了。《對話錄》蒂邁歐篇（Timaeus）中提到，物質世界是由幾何圖形所構成，最初的真正元素是由正方形之半及正三角形之半的兩種直角三角形所構成，這兩種也是由角度推得邊長比中，可用無理數表示的最基本直角三角形（洪萬生；英家銘；HPM 團隊譯，2008：157）。正多面體的主要構成元素，也是從這兩個形（圖 2-5）而來。



$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:1:\sqrt{2}$　　$\overline{HF}:\overline{GH}:\overline{GF}=1:\sqrt{3}:2$

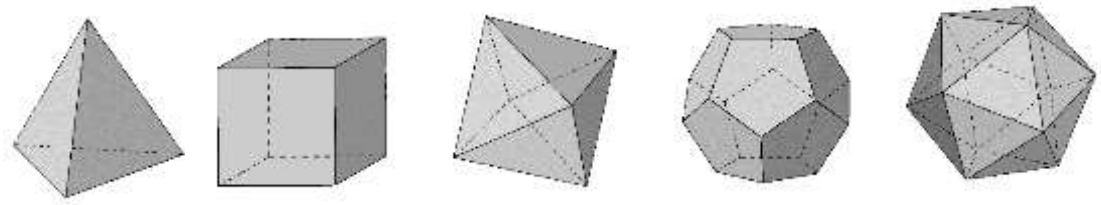
圖 2- 5 基本直角三角形

資料來源：研究者整理自傅佩榮（譯）（1986：246）繪製

正多邊形是由相等的邊長及相同的夾角所構成的平面圖形，從邊、角數量最少的正三角形開始，有無限多種的正多邊形，而圓形可視為有無限多邊的正多邊形。正多面體，每個面都由同樣的正多邊形構成，相鄰兩面的夾角也都相同，而這樣的正多面體卻很特別的只有五個。由正三角形出發思考，在同一個頂點處放置正三角形，只能放置 1、2、3、4、5、6 個正三角形（圖 2-6），共有下列六種可能，其中 1 個、2 個及 6 個的正三角形並無法形成立體形狀，所以同一頂點處有 3、4、5 個正三角形的正多面體（圖 2-7），分別構成正四面體（Tetrahedron）、正八面體（Octahedron）、正十二面體（Icosahedron）。再由正四角形（即正方形）思考， 在同一個頂點處放置正方形，只有 3 個正方形能得到立體形狀，也就是正六面體（即正方體 Hexahedron），正五邊形可以得到正十二面體（Dodecahedron），而正六邊形在同一個頂點處放置，剛好有 3 個，並無法構成立體圖形，至於其他的正多邊形就更不可能造成正多面體了。由此我們可以確定正多面體最多只有下列五種而已。



圖 2- 6 同一頂點三角形數量
資料來源：研究者整理繪製



正四面體　正六面體　正八面體　正十二面體　正二十面體

圖 2- 7 正多面體
資料來源：研究者整理繪製

傳聞當時的柏拉圖學院標榜著「不懂幾何學不准進來」，或許這樣的一個標語是否存在需要更多的考證，但可以深信的是他們對幾何學的重視，在他的名作《理想國》中，也將數學列為理想的教育基本方針。如果說神是由形及數來構成世界，可由這兩種三角形創造出四種多面體，分別對應四個元素，那麼可以發現其對應關係為正四面體—火，因火原子具有尖銳的角，碰到是會痛的；正六面體—土，土原子緊密結合填滿空間；正八面體—風，風原子又濕又熱，介於水、火之間、正二十面體—水，水原子光滑圓潤，流動順暢。但空間中有五種正多面體，還有一種是正十二面體，柏拉圖暗示神以此勾畫出宇宙，整理如表 2-1（周念縈譯，2017：66）

表 2- 1 正多面體的組成

	頂點數量	邊數量	面數量	正 n 邊形構成	對應元素
正四面體	4	6	4	正三角形	火
正六面體	8	12	6	正方形	土
正八面體	6	12	8	正三角形	風
正十二面體	20	30	12	正五邊形	本質
正二十面體	12	30	20	正三角形	水

資料來源：研究者整理自李心儀、劉雲英、謝叔樺（合譯）（2005：206-208）

柏拉圖提出有一個異於我們存在的理想世界，那是一個永恆且不變的存有，而我們唯有透過數學作理性邏輯演繹， 才能正確認識所處的現實世界。因為我們所處的現實世界總是瞬息萬變，如果想要看清世界的本質就必須將自己的視野提升到理想世界，而最佳的方法就必須仰賴學習數學。柏拉圖選擇用幾何的方式描

述宇宙，運用對稱性，並且使用單一法則解讀宇宙的關聯性。如果從他的洞穴理論來嘗試探索，當中提到現實世界就像是洞穴裡的那些人一樣，我們都是被侷限在自己感官認知的表象中，因而發展出一套自己的世界觀，如果我們想要突破既有的框架，得爬到理想世界來看清身處的現實世界，這需要理性的思維來建立一個理想的理論架構，而五個正多面體，提供了他這樣的元素，也因循這個模式，建立出屬於他自己的理論架構。（周念縈譯，2017：80）

另外，如果將焦點放在點、面數量的觀察，會發現有一種美麗的對偶性（duality）[9]， 以正六面體與正八面體為例，正六面體的六個面、八個點分別對應到正八面體的六個點、八個面。如果用泥塑作品完成一個正六面體，從八個頂點同時緩慢施力向內擠壓，加上耐心及適度的修飾，將可以轉換成正八面體，也就是將正六面體的八個頂點轉換成八個面，當然，也可以逆向操作。而正十二面體與正二十面體呈現對偶，正四面體本身對偶。

柏拉圖嘗試給出整個世界存在的理論，姑且不論這種觀點是否正確，但勇於探索、願意挑戰的態度值得學習的。他的氣度可在「如果有人測試我的宣告，發現並非事實，我們將恭賀他獲得榮耀」這段話感受到，這是對世界企圖解釋、找出理論，卻又不失懷疑的重要價值觀（翁秉仁、趙學信譯，2012：序曲）。

是什麼樣的價值觀，決定了他用這種方式詮釋世界呢？又是什麼原因選擇使用數學的語言表示？柏拉圖的思想中，隱含著「理想超越現實」，認為有一個理型模式支配著世界的存在，而最理型的呈現是數學中的幾何，在純粹的幾何圖形中，可以確定整個世界的運轉，用理想的抽象性，解釋所有的存在。這樣的精神性，在畢達哥拉斯學派提出的理論中，也可以見到相關的影子，他們用「萬物皆數」當作精神支柱，以此為核心建構出整套系統，其理論的後設認知中，理型世界深深影響著他們，也藉此認識了存在於世界的部分面向，雖然他們並未成功的完成整體架構，但企圖心支持著他們往前更認識了所居住的世界。數學的真理及邏輯演繹的客觀可靠，影響了當時希臘地區學者們的研究，邏輯演繹雖然已被很多人使用，但只初具規模，並未完備。善用邏輯演繹並將幾何學推向顛峰，甚至影響各領域的研究，不得不介紹下一位重量級的人物—歐幾里德。

肆、邏輯演繹的全面運用—歐幾里德（Euclid 約 300B.C.前後）

從人類發展數學開始，所有的幾何知識都是為了解決單一問題而找出解決方

[9] 對偶性（duality）：基本上符合「意義相對」、「句法相似」、「兩個結構相同的語句」
中文修辭學上的對偶：大漠孤煙直，長河落日圓—王維《使至塞上》。
數學中的對偶：兩點連一線、兩線交一點；兩線決定一平面、兩面確定一直線；三點共線、三線共點。

法，因此各概念間顯得片斷、零碎，直到歐幾里德的出現，幾何的重要性進入另一個層次。關於歐幾里德的生平，我們知道的並不多，主要是根據普羅克洛斯（Proclus 412A.D-485A.D）所編著的《幾何學發展概要》中獲知，並且從各種流傳下來的不同書籍中推敲。而其原著的《幾何原本》（Elements）早已失傳，現在能看到的都是後人修訂過的版本，目前已知的版本超過 1000 多種，其中的權威版本是約翰·路德維格·海伯格（Johan Ludvig Heiberg 1854-1928）所校訂註釋的《Euclidis opera omnia 歐幾里德全集 》（藍紀正、朱恩寬譯，2003：導言 1, 6）。

《幾何原本》開宗明義有 23 個簡單的名詞定義、5 個「直覺」為真實的公設及 5 個視為普通常識的公理，後續是一系列的命題，共分為 13 卷，內容包含了平面幾何、數論、比例及立體幾何，試圖統整所有幾何觀念（藍紀正、朱恩寬譯，2003：卷I 1-3）。此書從最簡單的基礎，大家都能接受的事物出發，有系統且邏輯性的將知識嚴密組織起來，藉由演繹的方式，嚴謹的證明每一道命題，並加以分類、比較，進行抽象化的統一性理論。其影響力不僅是在幾何方面，另外有著更深一層的意義。當人只靠感覺做事，有時容易落入主觀判斷，也會容易被事件的旁枝末節抓住視角，變得處事失焦，而《幾何原本》傳達出，我們必須尋求理性的思維方式補足這方面的缺失，以事件的源頭為依據，然後一步步尋找可以護持的論點，以一種客觀、嚴謹的邏輯推理，用大家都能知道且接受的方式釐清事件的來龍去脈及未來走向，藉此找到整體事件的結果（圖 2-8），這是一本教導我們思考的書籍，藉由自己的能力找到真理。而這樣的理性邏輯思維，是可以適用在所有人身上，也是每個人都需要按部就班來學習的能力。

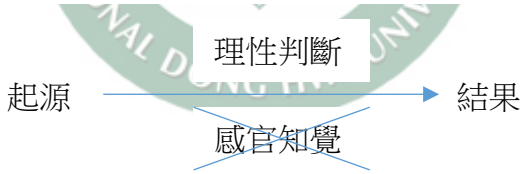


圖 2- 8 思考著重之處
資料來源：研究者整理繪製

徐光啟《幾何原本雜議》中說得好：（藍紀正、朱恩寬譯，2003：導言 13）

> 人具上資而意理疏莽，即上資無用；人具中材而心思縝密，即中材有用，能通幾何之學，縝密甚矣，故率天下之人而歸於實用者，是或其所由之道也！

這種處事的基本態度，不僅僅在幾何上有影響，也在文學、科學、政治…各種領域中有著強大的影響力。巴魯赫·斯賓諾沙（Baruch de Spinoza 1632-1677）《倫理學的幾何論證》（Ethica Ordine Geometrico Demonstrata），也是從定義開始，接著是公理，然後是命題，並給出推論與證明，書中的基本架構與幾何原本一書要傳達的精神不謀而合（容士毅譯，2010：293）。艾薩克·牛頓（Isaac

Newton 1643-1727）《自然哲學之數學原理》序中提到「從那麼少的幾條外來的原理，就能夠取得那麼多的成果，這是幾何學的光榮（It is the glory of geometry that from so few principles, fetched from without, it is able to accomplish so much.）」，而他在多數領域的偉大成就，也是以數學為基礎，根據基本定理再做邏輯性的推理，進而得出結論（洪世民譯，2011：141）。美國會有南北戰爭的內戰爆發，當然有諸多原因，其中一個重要原因是南方的蓄奴制度，而這嚴重違反《美國獨立宣言》的開頭「我們認為以下真理是不言而喻的：人皆生而平等，享有造物主賦予給他們的不可剝奪的權利，包括生命、自由和追求幸福的權利」。當時的美國總統亞伯拉罕·林肯（Abraham Lincoln 1809-1865）自己都說受《幾何原本》嚴謹的邏輯演繹影響，基於人皆生而平等這個源頭信念，推理出蓄奴制度的不合理，所以不惜發動流血戰爭，用國人的性命來維護最高道德、維護人權，推動國會通過美利堅合眾國憲法第十三條修正案，主張解放黑奴制度。他知道需要堅定自己的信念以捍衛獨立宣言，造成流血衝突也就是必要承受之重了，而整個堅定信念的過程是不能與源頭有所牴觸，更不能受愛護國人、珍惜生命的情感所羈絆（洪萬生；英家銘；HPM 團隊譯，2014：153）。

《幾何原本》從「不證自明」的「正確」基礎，再用理性來進行嚴謹的邏輯推理，其偉大之處在於將原本對空間的直觀印象轉為抽象邏輯理論，而能夠進行演繹，更將這樣的理性概念傳達到各個領域，奠定了《幾何原本》的重要地位，是一部劃時代的偉大著作，影響著後代長達 2300 年，是歷史上僅次於《聖經》發行量第二大的書籍，今日的中學幾何也還在認識《幾何原本》的部分內容，相信這個影響還會一直持續下去沒有終止的一天。奧瑟曼（Robert Osserman）《宇宙的詩篇》評價得好（葉李華、李國偉譯，1997：9-10）

它給人一種確定感；
它的方法具有強大的威力；
證明方法展現高妙的才智；
幾何圖形的美感。

有一句諺語是這樣說的「種瓜得瓜；種豆得豆」，記得念中學時期，一直覺得這句話很無聊，種瓜當然得瓜，絕對不會得豆啊！直到成為老師，講述證明題時，突然有一刻，覺得這句諺語說得實在太好了，而且跟證明題一樣，都是「以終為始」，當我們想要得瓜（求證）時，只要在一開始時種瓜（條件），然後好好澆水、除草（邏輯演繹），才有機會在最後歡呼收割，得到自己想要的瓜，千萬不要在一開始去種豆，因為那是絕對不可能得到瓜的。這種基本的邏輯思維，卻常常在我們做事時，因為受感覺、情緒干擾而忽略了源頭與結果的關係。當一個偉大的著作深深影響著當代的人，是一種對人類而言珍貴的禮物，但是另一方

面卻也侷限了思維方式，失去開放且自由的想像力。人類等待了長達 1,800 年，才有了思維上的突破，才有人將幾何往前推進，其中之一的推進是將純幾何融入代數計算，進而創造出解析幾何的笛卡爾。

第二節 歐氏幾何的發展：解析幾何

壹、由細部看整體—勒內·笛卡爾（René Descartes 1596～1650）

笛卡爾從小多病，在成長過程中被允許自己決定起床的時間，這段上午的空白個人時間，給了笛卡爾絕佳的內省時光，藉由自己的思考來得出結論，雖然沒有證據可以說明他的創造力源自於此，但從他 1649 年前往寒冷的瑞典，並且需要在清晨五點起床，然後短短一年後即客死異鄉來看，讓他可以自由決定起床的時間絕對是重要的。笛卡爾總會懷疑自己所學內容的用處，甚至質疑所有的基本概念，但他還是努力創造出一種可以發現世界真理的哲學，他決定以清晰可見，不會引起任何懷疑的觀點作為思考的源頭，以數學強調確定性，需要邏輯演繹確保推理過程嚴謹程度的方法，雖然他很快的完成了有關物理學的相關論文，卻因聽說了伽利略（Galileo 1564-1642）與教會在教義及科學上的衝突，並熟知 1633 年教會對伽利略的審判，因此他決定不發表該篇論文，以避免因任何一處與教義上的衝突而令他遭受教會的審判（李文林等譯，2004：341）。但他最終還是發表了他的新思想，提出了嚴密的準則，對於困難的問題，根據問題的必要性，盡可能分解成許多小部份，從最簡單和最容易知道的事物開始，一步步升級至更複雜的知識，並再三檢核所有的過程，直到確定沒有任何疏漏，不仰賴可能會欺騙自己的感官認知，而這裡唯一可以確定的是懷疑行為的真實存在，這樣的觀念，促使他完成大作《論適切指引理性及追求科學真理的方法》（Discourse on the Method of Rightly Conducting One’s Reason and of Seeking Truth in the Sciences）首次發表於 1637 年，簡稱《談談方法》，這種不信任感官，需透過理性思考來表述世界的態度引領著當代，甚至是後代哲學的發展（洪世民譯，2011：128-130）。

希臘人因為想要製作地圖，曾經對地面位置關係做了一系列的研究，只是希臘人著重在幾何學上，用一系列幾何的方法來完成，也製作出範圍較小的地圖，在托勒密王朝時期，地圖的製作已經有了相當精準的程度，甚至已為地球畫出了緯度，但關於經線則尚未有一個完整的理論出現。而相對完整的幾何與位置關係直到笛卡爾的時期才比較明確的得到決定性的成果（陸劍豪譯，2002：74-75）。笛卡爾在對希臘人處理幾何的問題中提到：「希臘幾何太過抽象，不過是用來訓練瞭解，使想像力大為疲勞的工具罷了！而代數太過於遵守原則和公式，計算過於繁雜，不是一門改良心智的科學。」希臘人的幾何是純粹的，透過圖形找出相關的角度、長度、面積和體積間的關係，需要很多的文字定義與說明，而其遺留

下來三大幾何難題，經過了 2000 年來無數數學家的鑽研，仍未找到解答，直到十九世紀才被證明是無解的。笛卡爾認為應該從更根本的問題著手，透過 x 軸與垂直的 y 軸建立一個抽象的座標平面，即現代所稱的直角座標平面（rectangular coordinates plane）。

直角坐標的第一個重要概念：位置，與測量息息相關，遠在古埃及與巴比倫人就有了，而笛卡爾以數對形式給每個點一個精確的絕對位置，以點為基礎建立圖形，讓所有的圖形代數化，因此所有的圖形都可以用函數或方程式表示。古希臘的幾何，通常探討的是圖形大小及形狀，兩個圖形間的關係會以距離及角度來確定精確的關係，而笛卡爾除了用函數在直角座標上區分出形狀及大小、也區分出圖形的所在位置，也因著這樣的特點，兩種圖形之間的距離與角度關係也就確定了。以下就直角坐標平面上的距離與畢氏定理的關係做說明，並以方程式表示圓錐曲線[10]（圖 2-9）為例：

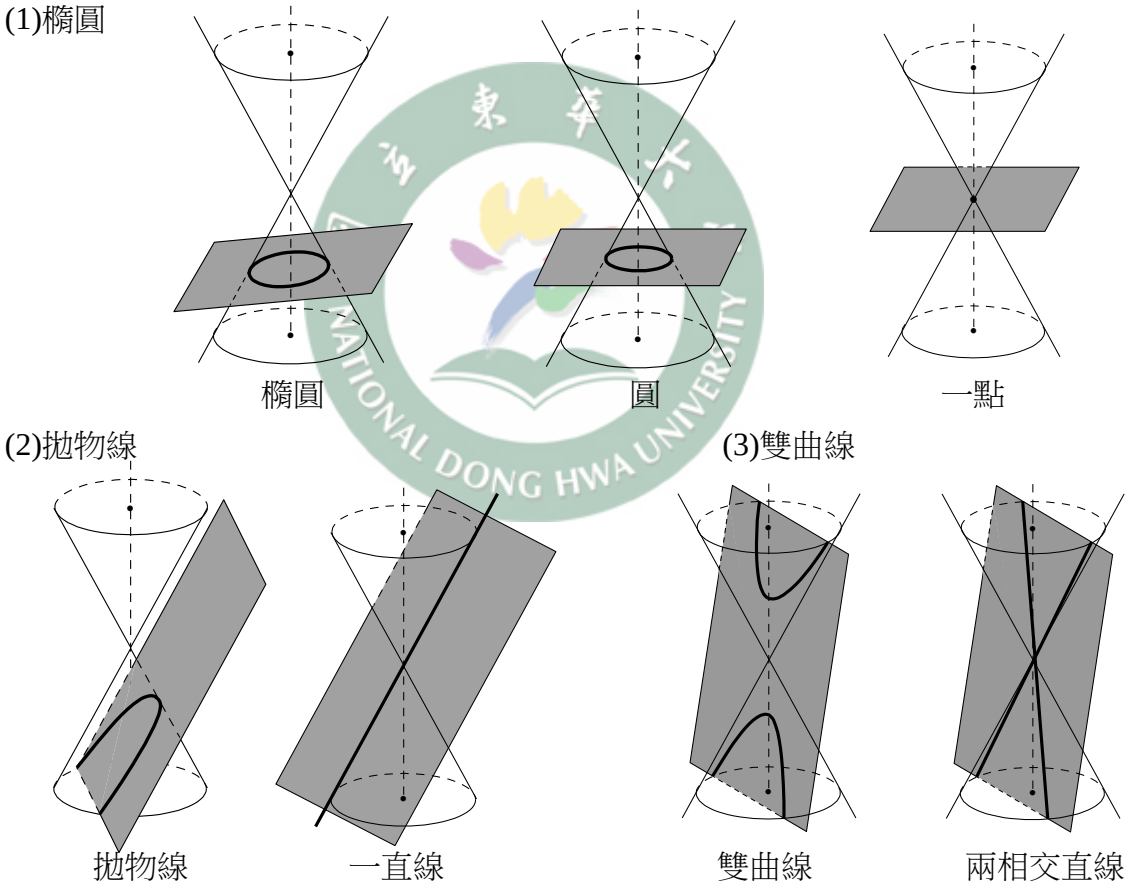


圖 2- 9 圓錐曲線

資料來源：研究者整理繪製

[10] 圓錐曲線：圓錐曲面被平面所截，所得的交線即為圓錐曲線，常見的形狀有圓、橢圓、拋物線、雙曲線，另外有三種退化的特殊形狀，分別為點、直線及兩相交直線。

首先來看兩點間距離與畢氏定理的關係（圖 2-10），A點座標為$(-2，-1)$，$B(3，3)$，在座標中取點 C 形成直角△ABC，水平座標推得$\overline{AC}=3-(-2)=5$、垂直座標推得$\overline{BC}=3-(-1)=4$，根據畢氏定理$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$，得

$\overline{AB}^2=5^2+4^2=25+16=41$，

$\overline{AB}=\sqrt{41}\approx 6.40$

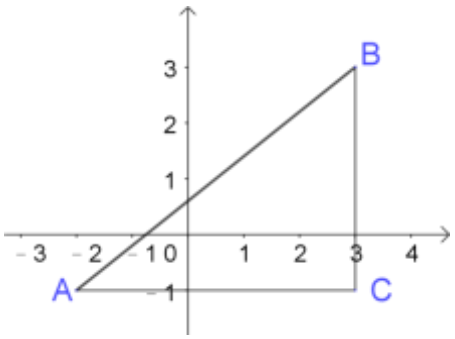


圖 2- 10 距離與畢氏的關係

資料來源：研究者整理繪製

而這樣的關係，可以推展到一般情況，若 $A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$，則兩點的距離$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

透過直角座標，我們以方程式為平面上的每一個圓「命名」，可以知道每一個圓的大小及位置。假設圓心 C 的位置在$(a，b)$，而圓的圖形視為點 $P(x，y)$以固定距離（即半徑 r）以 C 為中心所移動的軌跡，則圓上的所有點滿足 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，當圓心在原點$(0，0)$的位置時，圓的方程式更可以簡化為$x^2+y^2=r^2$，換句話說，我們可以定義當動點 P 滿足方程式$x^2+y^2=r^2$，則動點 P 所形成的圖形為圓形。不僅圓形可以如此表示，所有幾何圖形也都可以做到。再以橢圓為例，傳統幾何的定義為「在平面上，到兩相異焦點距離和為固定值的所有點所形成的幾何圖形」，假設兩焦點座標為 $F_1(c，0)$、$F_2(-c，0)$，到兩個相異焦點距離和為 $2a$，動點 $P(x，y)$滿足：

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}=2a$$

這個式子乍看之下非常複雜，以 b 透過$b^2=a^2-c^2$的關係取代 c，經過適當的整理，則會得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

是一種非常簡潔的型式來呈現橢圓。

而雙曲線及拋物線也都可以經由整理得到相當簡潔的方程式，整理成表 2-2：

表 2- 2 圓錐曲線在傳統幾何與解析幾何定義敘述的比較

	傳統幾何	解析幾何
圓	在平面上，和圓心等距離的所有點所形成的幾何圖形	動點 $P(x，y)$，滿足$x^2+y^2=r^2$
橢圓	在平面上，到兩個相異焦點距離和為固定值的所有點所形成的幾何圖形	動點 $P(x，y)$，滿足$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
雙曲線	在平面上，到兩個相異焦點距離差為固定值的所有點所形成的幾何圖形	動點 $P(x，y)$，滿足$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$
拋物線	在平面上，一直線及線外一點，所有到焦點與直線等距離的所有點所形成的幾何圖形	動點 $P(x，y)$，滿足$y=4cx^2$

資料來源：研究者整理

笛卡爾成功將幾何的問題與代數做連結，每一個點都有自己的絕對位置，每一條直線、每一種圖形在座標平面上都有專屬的位置，將圖形間的關係成功轉化成解方程式般的代數問題，並推展處理切線的情形，更容易掌握變化率的重要特點，也催生出微積分。另有一個重要進展，希臘人的幾何只能處理一維、二維及三維的空間問題，也就是長度、面積與體積的關係，換成未知數表達就是只能處理 x、x^2、x^3的問題，而笛卡爾一舉將其增加到可以處理任何維度，讓人類的數學思考能力有一個飛躍性的跨越（翁秉仁、趙學信譯，2012：60）。

用位置概念，成功結合了幾何與代數間的關係，無疑是笛卡爾解析幾何最重要的概念，而第二個概念：圖表對應關係，也是畫時代的影響。14 世紀前雖然有很多人已在研究兩種變量的相關性，但是將兩個變量間的關係以數對方式同時放在一個平面，以幾何方式呈現其相關性，傳達兩種意義的連結，奧里梅（Oresme 1323-1382）可以說是第一人。奧里梅在 1360 年寫了一本有關比例的書，首度觸及了有關無理數乘冪（即指數）的關係，可惜因為沒有發展出適當的符號，而沒有更進一步的進展，另外也相當程度涉及無窮級數的觀念，是第一個證明出

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{n}+\cdots$$

為發散級數（總和為無限大）的人（林聰源，2001：30）。他在 1361 年將變化量以圖形的方式呈現（圖 2-11），以橫軸代表時間 T(sec)、縱軸代表速度 V(m/s)來表達運動中物體加速度（a）關係

$$a=\frac{2-0}{4-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ (m/s^2)$$

找出與兩軸所圍出的面積為該物體所行經的距離 S，即 S＝△ABC 面積

$$S = 4 \times 2 \div 2 = 4(\text{m})$$

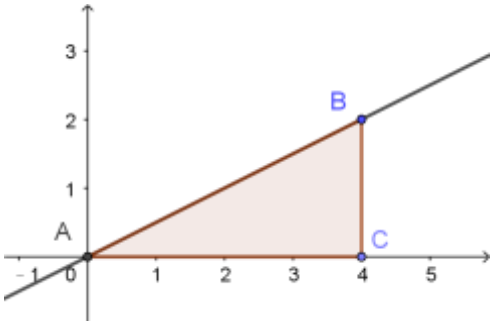


圖 2- 11 物體移動 V-T 圖

資料來源：研究者整理繪製

是首度藉由幾何圖形來表達相關性的人，也可以說是解析幾何的先鋒。奧里梅雖然已有初步的解析幾何概念，但他卡在符號系統的應用，也無深化的函數[11]關係，也就把創建解析幾何的重要任務轉交到笛卡爾身上了。笛卡爾並不是發現座標的第一人，但重要的是，他利用座標成功結合代數與幾何間的關係。

笛卡爾不僅僅是數學家，也是科學家及哲學家，從他創建的解析幾何，及他最重要的著作「談談方法」中，可以看出笛卡爾強調由細部出發，尋找問題的解決方式，甚至寫進他四大原則中的其中之一。歷史需要前人智慧不斷累積才會向前推進，解析幾何成功的結合幾何與代數，帶給後世巨大的影響，開拓出數學的另一片天地，而高中數學也是在這樣的基礎下奠基相關重要的概念，另一方面卻是讓幾何學的演進稍微停滯了一段時間，這部分將在第三章再作深入的探討。

貳、解析幾何的價值

從直角坐標平面，很容易推展到三維空間座標，開啟另一階段的空間革命，以筆者最近正在研究的 Oloid[12]（圖 2-12）為例（Dirnb¨ock; Stachel, 1997: 1-3），

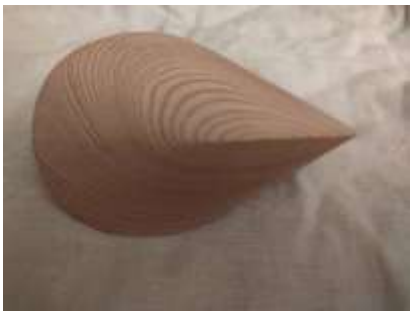


圖 2- 12 Oloid

資料來源：研究者整理繪製拍攝

[11] 兩個變量中，當自變數代入，只有一個應變數與之對應的關係。

[12] Oloid 是一種三維曲面，由保羅˙沙茨（Paul Schatz）在 1929 年發現，將兩個全等的圓過彼此圓心垂直擺放，以$\sqrt{3}r$的長度連接兩圓周上的點，用相同長度沿圓周移動所形成的可展曲面（torse），將 Oloid 置放在平面上，可「直線」滾動，並且它的所有表面都會接觸到該平面。

想要證明它接觸地面的「長度」均相等，目前還真不知道如何用純幾何的方式下手，而單靠解析幾何再加上前人的努力，約花了 2 個小時就得到證明了。其方式如下：圖 2-13，將兩圓π_1、π_2設定在$(y-\frac{1}{2})^2+z^2=1$、 $x^2+(y+\frac{1}{2})^2=1$、的位置，P 為 y 軸上一點，過 P 作兩圓的切線，B點在圓π_2上，與 y 軸負向的圓心角

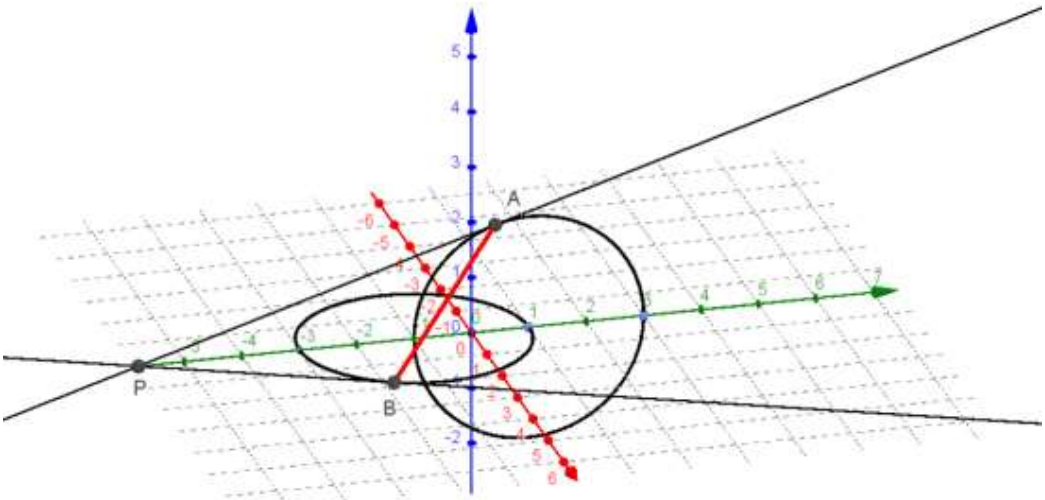


圖 2- 13 解構 Oloid

資料來源：研究者整理自 Dirnb¨ock; Stachel（1997: 2）繪製

$$B\left(sint,-\frac{1}{2}-cost,0\right)$$

$$P\left(0,\frac{1}{2}-\frac{cost}{1+cost},\pm\frac{\sqrt{1+2cost}}{1+cost}\right)$$

$$A\left(0,\frac{1}{2}-\frac{cost}{1+cost},\frac{\sqrt{1+2cost}}{1+cost}\right)$$

$$\overline{AB}^2=sin^2t+\left(1+cost-\frac{cost}{1+cost}\right)^2+\frac{1+2cost}{(1+cost)^2}$$

$$=sin^2t+(1+cost)^2-2cost+1$$

$$=sin^2t+1+2cost+cos^2t-2cost+1$$

$$=3$$

$$\overline{AB}=\sqrt{3}$$

為 t，則利用空間三維座標，搭配三角函數及畢氏定理即可證明出它接觸地面的「長度」均相等，這是純用立體幾何概念很難做到的。

除了將概念拓展到三維空間，還有另一個實用之處。在一堆數據中找出彼此的關係不是一件容易的事，而從圖形中看出關係會相對比較輕鬆。大數據分析最經典的例子，是第谷·布拉赫（Tycho Brahe 1546-1601）建立的觀測數據，由約翰尼斯·克卜勒（Johannes Kepler 1571-1630）花九年的時間找到關係，因為觀測的數

據值非常繁複，又有誤差的問題，而天文學的範疇不是本論文的重點，這邊用一種簡單的方式呈現其重要性（表 2-3、圖 2-14），時間為 x 軸、行經位置為 y 軸：

表 2- 3 物體移動位置-時間關係

時間(秒)	-7	-6	-3	2	9	18
位置	2	3	4	5	6	7

資料來源：研究者整理

如果我們將上述的數據轉化為座標平面上的點呈現，可以得到六個點 $(-7，2)$ 、 $(-6，3)$ 、 $(-3，4)$ 、 $(2，5)$ 、 $(9，6)$ 、 $(18，7)$ ，平滑連接

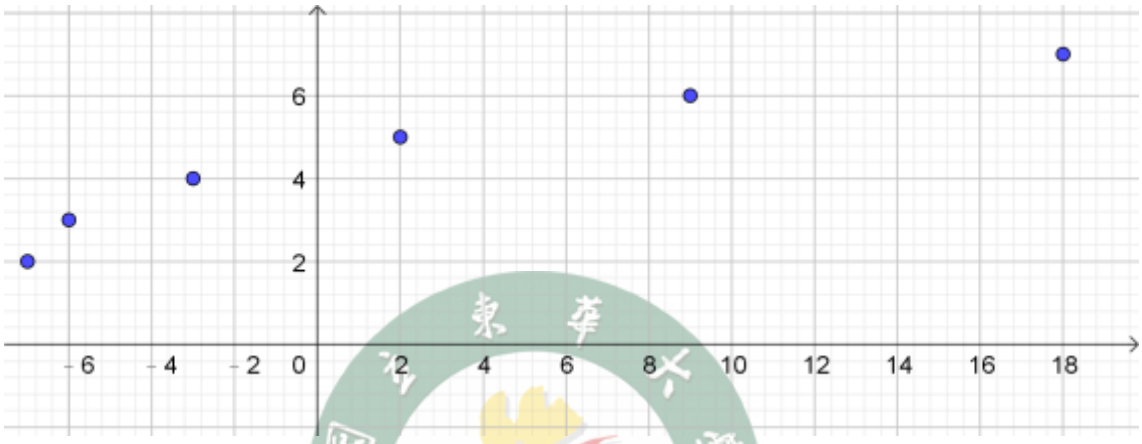


圖 2- 14 物體移動位置-時間關係

資料來源：研究者整理繪製

這六個點，可以得到連續性曲線，方便大膽猜測是哪一類型的圖形，以圖 2-13 為例，猜測為拋物線，小心驗證而確定時間與行經位置的關係為$x = y^2 - 4y - 3$。若克卜勒的年代已經有了解析幾何的概念，他可能就不需要九年的時間來觀測數據了。而兩個變量 x、y 的關係更導引出函數的概念，其中影響後世的數學發展，將數學的演進做了更深一層的推展，因其重要性非本文探討的重點，就不再做更深入的探索。古希臘的數學提到的三大幾何難題：方圓問題、倍立積問題、三等分角問題，困擾著後代無數幾何學家長達 2000 年，最後也是運用了座標概念，並以代數的方式證明不可能做到（容士毅譯，2010：198-203）。在解析幾何出現之前，幾何的問題需要透過大量且繁雜的計算才能得出結果，三維的立體空間關係更是需要切割成多個平面思考，代數間的雜亂數據不容易找出相關性，這一類不容易處理的棘手問題，都可以透過解析幾何的轉換，讓幾何問題不再只是幾何，而代數問題也不一定要用代數處理，兩者可以相互轉換，尋找容易解決的方式，提供更方便的解決方案。

每一個人都有背後的信念支撐他做出相關性的理論，從理論中，也可以感受到一個人如何看待世界的方式，畢達哥拉斯相信世界存在理想的定律，促使他尋找抽象的、卻可套用在各個三角形的畢氏定理；柏拉圖相信有一個理型的世界才

會提出五個正多面體來形塑世界；埃拉托斯特尼（Eratosthenes 276B.C.～194B.C.？）[13]相信地球是標準的球體才會想方設法計算地球半徑；歐幾里德相信邏輯演繹能完備幾何學才有《幾何原本》的偉大著作；笛卡爾相信幾何學可以更簡單才能統整出解析幾何。他們還有其他重要的信念支撐，也還有多個理論架構，但背後的信念支撐絕對影響深遠。當幾何學已發展到這個地步，都還是存在一個不證自明的特性—「平面是平坦向外無限擴展」[14]，當建立座標平面時，都根據這樣的特性而往前推進各種關係，進入到三維空間也是以相同的做法往外拓展，這些似乎都來自最簡單的基礎，是大家都能接受的直覺，而這種立基點是否確定為真呢？數學家們還需要哪些特質，才有機會挑戰這樣的立基點，再將幾何往前跨越？自由的想像力是其中一個重要關鍵，也還需要具備其他更多的能力，第三章試圖從中找出更多關鍵之處。

國立東華大學 NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

[13] 坐在海邊眺望遠方時，船隻總是從船身先消失，船的桅杆則在最後才會消失，而且海平面的消失線是一道弧線，可以由此簡單的現象推論身處的大地是一個廣大的球體，而非一個平面。希臘天文學家埃拉托斯特尼是當時埃及「亞歷山大圖書館」的館長，也因著這樣的信念著手計算地球的半徑。他觀察到亞歷山大城的正南方另一個大城塞伊尼（Syene）有一口井在夏至當天的影子正好位於井底，於是他在當天測量亞歷山大城一座垂直地面尖塔的影子長度，進而推算出太陽光線與尖塔的夾角約為 7°12’，即整個圓周的$\frac{1}{50}$，換句話說，塞伊尼的那口井與亞歷山大尖塔的距離相當於地球圓周的$\frac{1}{50}$，埃拉托斯特尼訓練一批人以固定的步伐，推算出兩地距離約為 787.5 公里，得到地球的大圓周長為$787.5 \times 50 = 39375$ 公里，利用阿基米德（Archimedes 約 250B.C.）推得的圓周率近似值 3.14，可得地球半徑為$39375 \div 3.14 \div 2 \approx 6270$公里，由現代已知地球的赤道半徑約為 6378 公里，其誤差不到 2%。是什麼樣的信念會讓埃拉托斯特尼著手計算地球半徑呢？首先，他透過與亞里斯多德同樣的觀察後，相信地球是一個球體；另外，他認為太陽的光線是平行的。而中國因為沒有這樣的信念，也就不曾想過計算地球半徑這件事了。

[14] 《幾何原本》中第 I 卷開頭給出的 23 個定義中，第 5、6、7 點跟「面」有關，分別是 5.面只有長度跟寬度；6.面的邊緣是線；7.平面是它上面的線一樣地平放著的面。

第三章 近代幾何的起源與發展

在數學發展的長流中，新觀念都是需要一段時間的蓄勢，經過長時間的檢驗才能被人所接受，當既有概念存在並影響深遠，新觀念就更難被世人所接受。《原本》這部偉大的著作就是這種現象的典型代表。歐氏幾何學從「內」在的經驗感受出發，以「不證自明」為「正確」的基礎，是其研究的立基點，用邏輯演繹的方式建立內容。以三角形的性質為例，從可接觸的三角形中，觀察其特性，在有限的大小內，推理得到所有三角形的共有抽象性質，如內角和必為兩直角之和、正三角形的每個內角都相等，這種概念既直觀又與自身經驗相連結，相對容易讓人接受，早已深植多數人的心中。但總是有人能從中跳脫既有的框架，並試圖給予挑戰，但真正成功的人往往需要更大的想像空間，更多嚴謹的內在思辨，懂得檢視既有的知識架構，並從周遭的生活經驗中尋找蛛絲馬跡，努力將視野看往更寬闊的遠方，讓想像力跨越既有的框架，才會出現後來的解析幾何、投影幾何，向量幾何及非歐幾何，其中非歐幾何又可再細分為橢圓幾何及雙曲幾何，表 3-1 說明歐氏幾何、投影幾何及非歐幾何在概念立基點上的差異。

表 3- 1 三種幾何的概念立基點

	歐氏幾何	投影幾何	非歐幾何
立基點	由 23 個定義、5 個公設及 5 個公理出發建立幾何觀點。	在歐氏幾何的脈絡下，將透視學中的消失點視為平行線的交點。	否定第五公設，以曲率區分幾何觀點 橢圓幾何曲率為正 雙曲幾何曲率為負
平行線觀點	平行線沒有交點，過線外一點僅有一條平行線。	平行線在無限遠有一個交點。	過線外一點可以有 0 或無限條平行線。

資料來源：研究者整理

非歐幾何學以「外」在的存有為前提，保有理性的邏輯推導，得到並非直觀可見，卻真實存在的整體概念應用。以空間平面為例，我們身處的地球，並非一個平坦且無限延伸的理想平面，而是一個彎曲平面所形成的橢圓球面，它大到人類無法親眼所見整體，但卻又可以從細微的變化中，想像可能的存有，好比三角形的內角和不必定是 180°，而是需要視平面的彎曲程度及大小才能確定。藉由想像力的自由奔放，做理性的推斷，數學家們得以窺見另一種幾何觀點的奧秘。而這種情況是如何一點一滴在人類的努力下完成。

一般學術界只將否定第五公設的幾何觀點稱為非歐幾何，本文並未改變此一

分類，而投影幾何在歐氏幾何的脈絡下提出平行線在無限遠有一個交點，嘗試改變對平行線的看法，故視投影幾何為非歐幾何的前身，稱其為近代幾何的起源。本章將試圖循著歷史脈絡，探索其中的轉變，理解更大圖像的幾何是在數學家的哪些信念下被挖掘出來。第一節首先探詢投影幾何如何延續並拓展歐氏幾何的觀點，嘗試做出哪些「本質」上的轉變，過程中數學家們經歷了哪些挑戰，面對困難的同時，是如何做出相關的因應來試圖讓理論更成熟，帶出不同於以往幾何觀點的價值。第二節延續投影幾何對歐氏幾何觀點做突破的方式，更大膽的跳脫歐氏幾何的框架，進一步讓幾何大放異彩，產生各種不失嚴謹邏輯推論，卻又迥異於歐氏幾何的新觀點，而其中數學家們所具備的共同特質是一種高度「自由想像力」的發揮，才能有這些新發現，並往前推進，然後又有新的創見。

第一節 近代幾何的起源：自由想像

人類在中世紀時的繪畫，沒有透視（Perspective）的觀念，可能是因教會、權力、戰爭、文化、對世界觀點的不同，而在繪畫上以有趣、有意義、著重關鍵處的畫風為主要呈現方式，不一定要有真實性，可以有各式各樣的想像空間，也就出現了許多不符比例的圖畫出現。於是開始有人思考如何呈現遠、近相關位置，進而發展出各種透視技法，從一個消失點、二個消失點到三個消失點，逐漸完整透視技法的應用。也因為從透視觀念中，視覺上的平行線會有一個消失點，似乎就像是兩平行線在視覺的最遠處交會一般，畫家們嘗試遵照比例的關係將之畫在紙上，但要如何確定其精確的比例關係呢？也就促成數學家投入相關的研究，人類開始用「透視」的想法，試圖打破傳統上視兩條平行線沒有交點的概念，當然，數學家們有其更崇高的理想，有一種趨向建立純幾何學的想望，不需要夾雜代數，進而發展出異於《幾何原本》觀點的投影幾何。本小節先對笛沙格的投影幾何做簡單介紹，並從中尋找他思考脈絡的蛛絲馬跡，再以此為基礎尋找出影響了哪一方面的幾何觀點。

壹、由整體看細部—吉拉德·笛沙格（Girard Desargues1591-1661）

笛沙格的年代與笛卡爾相近，兩人也是好朋友，特別的是笛卡爾以解析的方法統一幾何，而笛沙格以投影技巧統一對圓錐曲線的概念，好比圓在不同的角度下觀看就是一個橢圓，而這等價於將圓投影到不同於圓本來所在的平面上，而要統一所有的視角就不得不納入無線遠點，為了這個需求，笛沙格將往兩個延伸的直線視為在無限遠處交會；同一平面的兩相異直線在有限處或無線遠處相交，而所有無線遠點的集合形成了無線遠線，圓錐曲面被平面所截出的圓錐曲線，也就與圓柱被平面所截的概念相同，因為圓柱不過是頂點在無線遠處的圓錐，更進一步可以推得，橢圓與無線遠線無交點，拋物線與無線遠線相交於一點，而雙曲線

與無線遠線相交於兩點（李文林譯，2004：359）。

笛沙格一生中並無太多的著作，當年出版的第一本書－試圖處理圓錐與平面相交的計劃草案（Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan）並不暢銷，從他與笛卡爾的信件中，可以發現原因出在他對自己使用符號的堅持，造成該本書不易閱讀（J. V. Field; J. J. Gray, 1987: 176），直到 1864 年才被重新發現並出版，因為此書不易閱讀，故筆者從相關書籍《Topics in Mathematics for the 11th Grade》，嘗試以臺灣熟悉的數學語言輔助說明笛沙格定理。

圖 3-1 當△*ABC* 被一個光源投影到另一個平面形成△*A'B'C'*，連接各對應頂點的直線會分別相交於 *P*、*Q*、*R* 三點，而這三個點會在同一條直線上。當然，我們也可以視△*ABC* 與△*A'B'C'*在同一平面上。

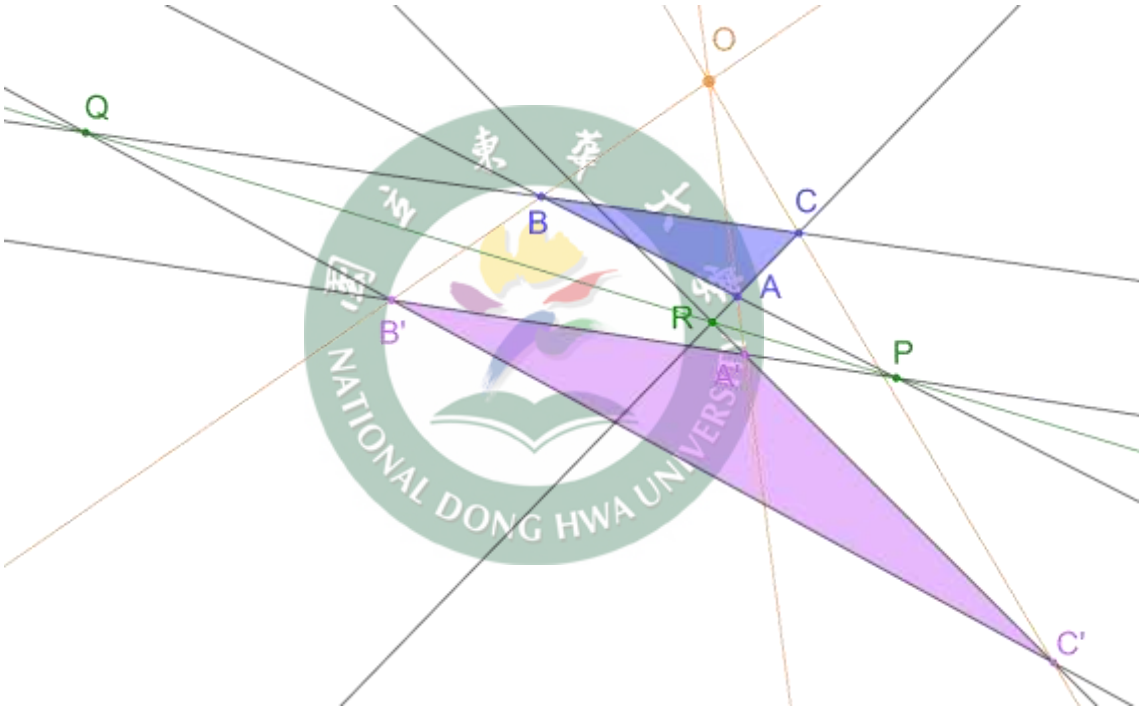


圖 3- 1 笛沙格投影定理

資料來源：研究者整理自李文林（譯）（2004：359）繪製

在無限遠點的基礎下，重新檢視雙曲線（hyperbola）（圖 3-2），想像 *P* 點沿雙曲線的軌跡往右下方（P_1）移動，逐漸接近直線，直到無限遠的位置與直線相交而從左上方出現，再沿雙曲線的軌跡（$P_2 \rightarrow P_3$）往左下方移動，同樣在無限遠處與另一直線相交而從右上方出現，然後回到 P 點。若從中文字面上看待「雙曲線」，似乎形成了兩條曲線；但英文名稱「hyperbola」中的「hyper」有「超出」的意思，可以想像成「hyperbola」是「一條」超出無限遠處再回來的曲線。

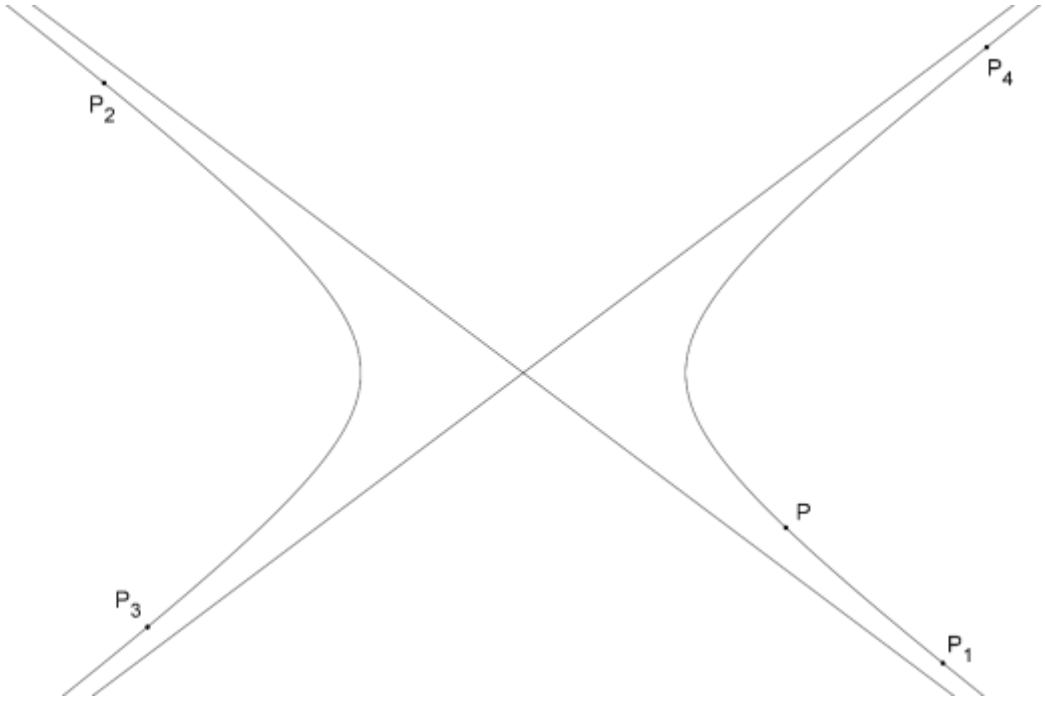


圖 3- 2 雙曲線視為單曲線

資料來源：研究者整理繪製

投影幾何除了帶進「無限遠點」的概念，還給出看待幾何圖形的新觀點。在歐氏幾何的觀點下，直線是由無限多個點構成，相異兩點確定一直線的位置，而投影幾何轉換成以一條直線有無限多個平面通過它，由其中兩個平面相交確定直線，以這樣的想法，建構出點、線的對偶性質。為了進一步認識數學上的對偶關係，我們以新觀點重新審視圖 3-1，並作反向思考，先畫一線然後在線上標出 *P*、*Q*、*R* 三點，令△*ABC* 及△*A'B'C'*的三邊延長線分別對應過 *P*、*Q*、*R*，連接各對應頂點的三直線會同時通過光源 *O* 點。從對偶關係中，看見圖形的點、線互換，呈現出另一種思維方式。在傳統的幾何學觀點，圖形最基本的元素是點，無限多個點構成直線，無限多條直線構成平面，再由無限多個平面形成空間。但從對偶的關係中，先從比較整體的空間出發，由不同空間交疊出平面，再由平面相交形成直線，而點的形成是由直線相交而來，形成一種看似完全相反的思考方式。

老天爺給人類的巧合是珍貴的禮物，總是有許多值得我們深思及探尋之處，笛卡爾的小看天下、笛沙格的大看世界，兩者並不牴觸，而是前人給我們靈活運用兩種觀點的契機。笛卡爾將歐氏幾何做量化的運算，結合代數，將原本幾何圖形的關係，以方程式及算式的方式，做量化的轉換；而笛沙格則是將幾何做本質上的轉化，不再受限平行線沒有交點的特例，引入無限遠點的概念，進而將所有的關係一般化，用自由且開放的想像力轉換看事情的角度，將圖形的形變過程「連續」起來，創造出整體圖像。

貳、整體到細部對後世數學的影響

一、無限遠點新視角

笛沙格引進了無限遠點的概念，讓人用一種新的想像，並以大視野看待舊圖形，在此以三種圖形為例來說明。圖 3-3，圓心 *C* 不斷遠離直線 *L*，並且不斷放大半徑，同時圓 *C* 保持與直線 *L* 相切，當圓心 *C* 到達無限遠處，並且半徑為無限大時，可以說此圓與直線完全重疊，成為一條直線。想像其他多邊形無限放大，也都會跟直線一樣，換句話說，所有的幾何圖形在無限遠處時都是一樣的圖形。這種大膽看圖形的方式或許過於挑戰一般人頭腦中的思維，卻是想像力自由奔放的重要契機。

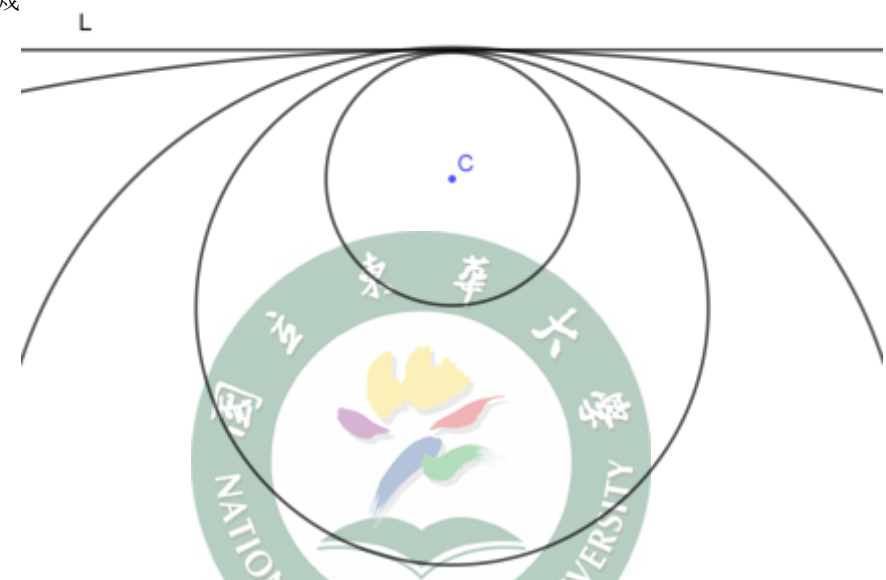
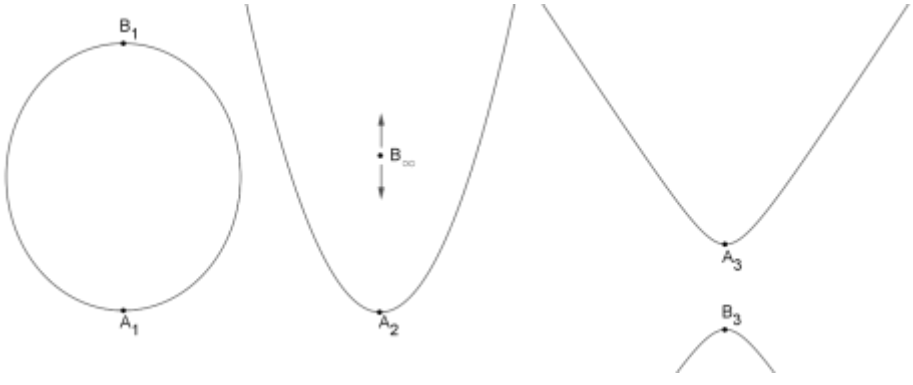


圖 3- 3 圓與直線

資料來源：研究者整理繪製

回到圓錐曲線，又會出現什麼新樣貌呢？圖 3-4a 是橢圓，如果 *B* 點不斷地向上延伸到達了無限遠的位置，形成了拋物線（圖 3-4b），當 *B* 點從無限遠「折返」，形塑出雙曲線（圖 3-4c），是否可以說這三種圖形是相同的，只是在不同位置觀察時出現視覺的不同圖像而已。（鄧麗君；廖玉儀合譯，2007：96）



a　　b　　c

圖 3- 4 新觀點看圓錐曲線

資料來源：研究者整理自鄧麗君；廖玉儀（合譯）（2007：96）繪製

在第二章第二節有簡單的介紹 Oloid，證明過：無論 P 點在 x 軸上的哪一個位置，與兩圓的切點連線段$\overline{AB}$都等長。想像 P 由圖 3-5 中的位置開始向 x 軸的負向移動，到達無限遠之後，從 x 軸的正向「回來」，因為 P 經過了無限遠，而完整形塑出 Oloid。

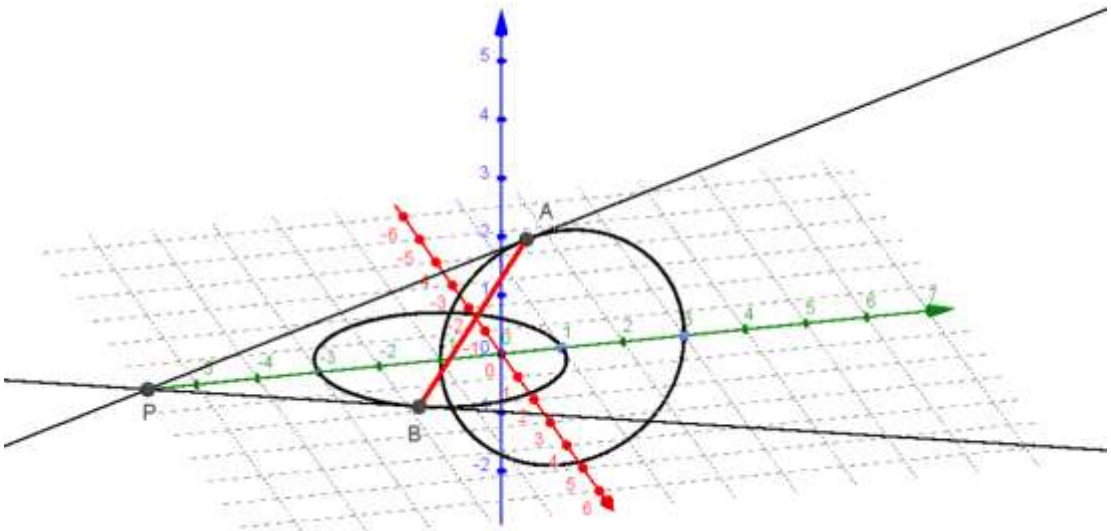


圖 3- 5 解構 Oloid

資料來源：研究者整理自 Dirnb¨ock; Stachel（1997: 2）繪製

以上三種看待圖形的新觀點，都在有了無限遠點這個概念後而產生，不需要再以特例來看待，尤其是 Oloid，這是一個確實存在的形體，也確實需要將 P 點移至無限遠，才能形塑出「最後」一段$\overline{AB}$來完整呈現 Oloid 的存在。

二、對偶新發現

原本兩點連成一直線、兩線確定一平面的關係，從對偶的角度下，看成：兩線交於一定點、兩面決定一直線，並為圖形帶出新的想像。例如：在歐氏幾何的觀點下，圓是由與圓心距離均相等的所有點構成，圖 3-6 左，然而圓也可以由無限多條線所構成，圖 3-6 右。

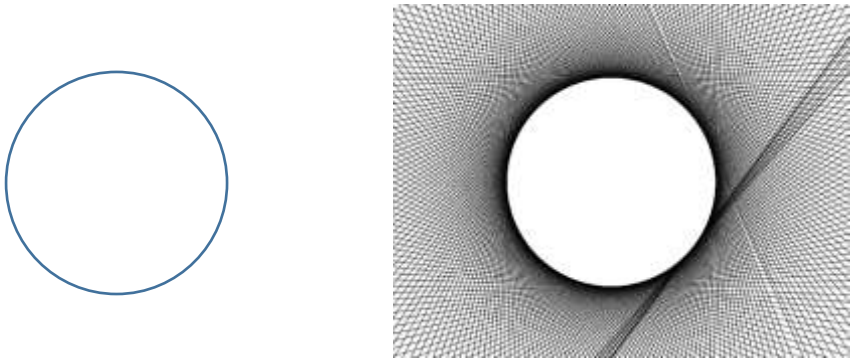


圖 3- 6 點與線形塑圓

資料來源：研究者整理繪製

從對偶的關係中，進一步又可以探討內、外的轉換，圖 3-6 右的空白部分，似乎要看成圓外才是比較合理的，因為線把平面佔據之處稱為內的話，只有空白處並未有任何直線經過，所以稱其為「外」，將圓的內、外觀點做了翻轉。而內外翻轉的經典例子，應該非莫比烏斯環（Möbius strip）莫屬了，圖 3-7，將一長條紙的其中一端扭轉 180 度，並將其與另一端相連接。想像一隻螞蟻在莫比烏斯環上的其中一個點沿表面前進，當牠回到原點時，會走過「所有」的表面區域，換句話說，這隻螞蟻不會像在一般的圓環形上時，只在圓環外側或圓環內側行走（姬健梅譯，2009：81-84）。

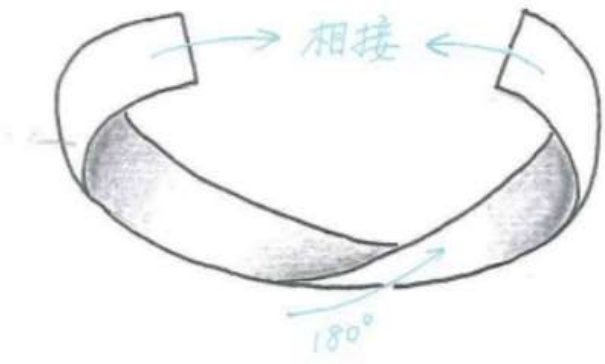


圖 3- 7 製作莫比烏斯環
資料來源：研究者整理自姬健梅（譯）（2009：81）繪製

笛沙格的概念不會憑空出現，是人類經歷過一段相當長的時期，對透視進行研究，才為笛沙格奠定了基礎，在這些看似南轅北側的關係中，可以透過無限遠與對偶的關係，建立起一個整體的脈絡。數學家們不會因此滿足，藉由持續的觀察、思考、想像，再度將幾何學往前推進，而這一切都來自對第五公設的探索。在《幾何原本》中，歐幾里德將數學作嚴謹且有系統的整理，引領人類的思維長達 2000 年之久，過程中雖不斷有數學家嘗試證明第五公設，卻沒有明顯的成果，人類對第五公設的不滿足，並在一次次的探索後形成新格局，陸續出現不同的觀點，重要的分支有雙曲幾何、橢圓幾何等等，由不同的立基點出發，讓第五公設不再是一個牢不可破、必須遵守的觀點，幾何自此進入另一個層次。

第二節 近代幾何的發展：非歐幾何

歐氏幾何在周圍環境的有限空間中建立起所有的觀念，其中有名的第五公設為了避免觸及無限的概念，選擇做比較冗長的敘述。要邁向無限的世界，需要在腦中作大量靈活的想像冥思，那是一個現存空間無法觸及的世界，需要透過想像力的自由開展來深入探索，當然也不能背離現存的邏輯概念。這是一件相當不容易的事，人類在歐氏幾何盛行的兩千多年之中，很多的數學家雖然對第五公設有所疑慮，但思考驗證的同時，常常是在相信歐幾里德所提出的觀點下，試圖為第

五公設找到證明的方法，直到 18 世紀才有人大膽提出突破性的新觀點，重新開創出幾何的一片新天地。本小節將分作兩部分，首先針對曾研究第五公設的學者留下哪些特別的觀點，而他們又是基於哪些原因懷疑第五公設作為公設而非定理的正確性，最後卻又欠缺臨門一腳而功敗垂成。接著介紹三位對第五公設做出突破性發展的重要人物，他們想像空間存有的改變，整理出異於歐氏幾何的新觀點，將幾何學往前推進了一大步，有這樣的突破必須不被周遭環境的小小世界給侷限住，需要頭腦的自由想像，再透過細膩的觀察，做嚴密的理性邏輯推理，最後才得以提出令大家信服的理論。

壹、自由想像的火苗—懷疑第五公設

歐幾里德的《幾何原本》中，先對 23 個名詞作定義，再給出五個公設及五個公理，其中五個公設如下：

1. 由任意一點到任意一點可畫直線。
2. 一條有限直線可以繼續延長。
3. 以任意點為圓心及任意距離可以畫圓。
4. 凡直角都相等。
5. 一條直線與另外兩條直線相交，若某一側的兩個內角和小於兩直角，則這兩條直線不斷延長後在這一側相交。（藍紀正； 朱恩寬譯，2003：1-3）

第五公設怎麼看都有一點突兀，其他四個公設是那樣的簡潔，但第五公設卻比較像是一個定理而非一個公設[15]，而且歐幾里德直到命題 29 才引用第五公設，讓人不禁猜測連他自己都對第五公設有所疑慮，當然也有可能只是他將各種命題進行分類而做的編排方式而已，這方面因為文獻資料的缺乏，無法做比較明確的推論。兩千多年來有非常多的人對此展開挑戰，試圖從前面四個公設中證明出第五公設，使它成為一個定理，而這些人的努力也為非歐幾何的相關理論奠基了重要基礎。我們目前對第五公設的所知，很多資料都是從五世紀普洛克羅斯（Proclus 410-485）為《原本》所寫的評註而來（洪萬生；英家銘；HPM 團隊合譯，2014：180, 181），根據他的記載，最早對第五公設有研究的是波希多尼（Posidonius 135B.C.-51B.C.），他是當時代的通才，不過，他並不是想試圖將第五公設轉定理，而是改寫平行線的定義。《原本》中所述的定義為「同一平面內的直線，向兩個方向無限延伸，在不論哪個方向它們都不相交」（藍紀正；朱恩寬譯，2003：2），其中涉及了無限的字眼，當時的希臘人尚未有能力處理無限的問題，也就盡量試圖避免無限的觀念產生，也就促成波希多尼將平行線定義改

[15] 公設（公理）：判斷依據為自明性，明顯為真，表述不能繁複。
定理：以公設為源頭，透過嚴密的證明過程所得到的結論。

寫成「同一平面上，處處等距的兩直線」。而第一個嘗試證明第五公設的人是克勞迪烏斯·托勒密（Claudius Ptolemy 90-168），之後也還有多人嘗試證明，其中也包含了普洛克羅斯，在他之後的一千多年中，也都陸續有人嘗試證明，但最後都功敗垂成，總是在證明的過程中出現瑕疵，雖然有著錯誤的存在，卻也因此堆疊出思考的火花，激發出更不一樣的想像力，這當中有幾個特別的人物值得我們提出來探討。

首先要提到約翰·普羅菲爾（John Playfair 1748-1819），用簡潔自明的敘述方式重新詮釋第五公設：「過直線外一點，恰有一條直線與給定的直線平行」，雖然這樣的說法比起第五公設來得簡潔，為何歐幾里德並沒有採用呢？原因還是跟波希多尼改寫平行線定義相同，都是涉及了無限的概念，而希臘人總是避免無限概念的出現，這個詮釋是由普洛克羅斯第一個提出來，但他無法用理性邏輯推論兩種定義的等價關係，而普羅菲爾是第一個證明出兩種陳述等價[16]，因此稱其為普羅菲爾公理（Playfair's axiom），不過普羅菲爾還是無法將它變成一個定理（洪萬生；英家銘；HPM 團隊合譯，2014：181）。

阿德里安-馬立·勒襄特（Adrien-Marie Legendre 1752-1833）（吳定遠，1978：1），在不用第五公設的情形下證明出以下命題：

1. 若三角形的內角和等於兩個直角，則第五公設成立
2. 若一個三角形的內角和等於（或小於）兩個直角，則所有三角形的內角和等於（或小於）兩個直角
3. 三角形的的內角和不可能大於兩個直角

勒襄特雖然未能挑戰成功，但已開啟了三角形內角和有異於 180°的可能性，雖然他本身還是相信第五公設的正確性，卻也給出了另一種觀看第五公設的可能性。

所有前人的努力、證明的過程都被發現了瑕疵，義大利的喬瓦尼·薩開里（Giovanni Saccheri 1667-1733）為這段過程開啟一個初步的里程碑，他認為截至目前為止第五公設無法從其他公設證明出來的可能原因是人類存在的世界模型所造成，雖然還沒有人能證明它，但我們相信它是可以被證明的，而既然無法直接證明，薩開里將焦點做反向的思考，過直線外一點，可能會有下列兩種情況發生

1. 不存在一直線與給定直線平行
2. 存在多於一條直線與給定直線平行

針對第一種情況，歐幾里德已經證明了其存在性，但第二種情況就特別了，

[16] 等價：不同的敘述，但真值一樣。在數學中，A、B 等價的其中一個判准為可由 A 證明得出 B，也可以由 B 證明得到 A。

薩開里發現許多特別的關係，但無法找到矛盾之處，他相信第五公設的正確性導致他錯過了發現非歐幾何的世界。（洪萬生；英家銘；HPM 團隊合譯，2014：182）

從《幾何原本》出版到這一時期數學家們的信念是要將第五公設證明出來，而不是有另一個迥異於歐氏幾何世界的存在，雖然他們都對第五公設有所疑慮，卻又被《幾何原本》作為偉大著作的權威性給侷限住了。直到十九世紀有人憑著超越當代的自由想像，挑戰在幾何中的權威著作《幾何原本》所提出的觀點，開始尋求其他的可能性，為往後的世界給出改變的可能性，將思考的重心放在「是否有一種幾何系統，過直線外一點，存在多於一條直線與給定直線平行」。（洪萬生；洪贊天；林倉億合譯，2013：216-221）

貳、自由想像的多元發展—否定第五公設

一、卡爾·弗里德里希·高斯（Carl Friedrich Gauss 1777-1855）

數學家高斯最廣為人知的小故事，是他在小學時的一次數學課堂中靠自己的思考，快速算出 1～100 中所有整數累加的總和。而他的整個求學階段及後來的學術生涯，對數學的多個領域都有研究，如 1796 年完成尺規作圖的正十七邊形，1799 年證明了代數基本定理作為博士論文（葉李華；李國偉譯，1997: 54）。高斯深愛邏輯演繹的理性思辨，強調嚴密的必要性，除此之外也要求美感、講究組織結構的嚴密性與清晰的形式，他屏棄任何形式的暴力、不齒於衝動憤怒，或許這是對暴君般父親的教養方式做抗議的一種心理狀態。高斯腦中的全新幾何觀點迥異於歐氏幾何，只要一經刊載，公開的爭辯必定伴隨而來，更可能有大量苛薄的責難，所以選擇將自己的研究深藏在心中，只偶而利用信件與友人們分享（朱建正等八位合譯，1991: 34-36）。高斯在心中默默的反抗著歐幾里德的幾何學，不過高斯反抗的不是邏輯演繹系統，他反抗的是歐幾里德的幾何觀，第五公設的正當性。而本文接下來想要談的，是高斯從未發表過，卻在他雜記中留給後人關於非歐幾何的概念。

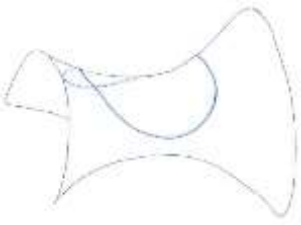
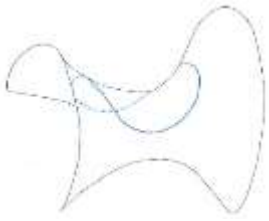
因為個性嚴謹的關係，他只發表已經成熟的理論，雖然他反對歐幾里德的幾何觀點，並做了相當程度的研究，但他並未發表相關內容，只能從他遺留下的文件資料與友人的信件中，確信他對新幾何學的觀點已經發展出相當完整的理論架構。經過了兩千多年，幾何學終於要進入一種全新的觀點了。高斯意識到三角形的內角和會是 180°，可能只是我們所見的三角形都太小的緣故，只要三角形足夠大，其內角和可能會小於 180°。高斯曾在三座山的頂峰處，進行測量以確定此想法，但所得的測量值卻在誤差範圍內，無法證實他的推論是否正確，雖然如此，高斯還是堅信自己的觀點，只是他無法測量更大的三角形了。不過關於在高山頂端進行測量一事，另有一種說法是高斯為了解決大地測量的誤差所進行的實驗。

1816 年，高斯在德國境內做大地測量，大地測量是以三角學為基礎，也就是要將想測量的大區域土地範圍，切割成多個小三角形進行測量，進行距離及角度的累加並檢視誤差，但接合的誤差來源除了測量，還會受地球的形狀影響，若地球是一個歐氏幾何下的完美平坦平面，從基礎幾何學就可以解決誤差，若是一個完美的球體，則用球面幾何學也可以輕鬆搞定。實際上，艾薩克·牛頓（Isaac Newton 1643-1727）已確認地球接近一個橢球面，所以高斯為了測量的精準度，他必須解決德國土地的彎曲程度。如果是一般人，這時會思考的應該是地球的真實形狀為何？會影響到大地測量的哪些部分？然後用哪一種方法可以進行修正。但高斯驚人的地方就是與一般人不同，他將問題逆向思考：「如何利用大地測量來確認地球的形狀」，而高斯也成功的導出能適用在任何彎曲程度曲面上進行測量時所會得到的曲面「曲率」，並於 1827 年發表《曲面論》，其中有兩大定理至今仍是非歐幾何不可或缺的：（葉李華；李國偉譯，1997：56-59）

(1) 曲率本身視為空間
(2) 空間的曲率可以單純研究曲面本身

關於曲率大致可以整理成表 3-2

表 3- 2 曲率

	絕對值較小的曲率	絕對值很大的曲率
正曲率	圓周長小於 $2\pi r$	圓周長遠小於 $2\pi r$
		
負曲率	圓周長大於 $2\pi r$	圓周長遠大於 $2\pi r$
		

資料來源：研究者整理自葉李華；李國偉（合譯）（1997：70）

感官看到的表象有可能是錯誤的，需要用理性思維來確認，數學家埃里克·坦普爾·貝爾（Eric Temple Be1l 1883-1960）曾說：「沒有假設就沒有證明，因此，在所有的爭論中，要先檢查其假設」，當我們透過感官觀察後提出假設，就需要用理性給出證明（洪萬生；英家銘；HPM 團隊譯，2014：155）。人類因為處在三維的空間之中可以很清楚的觀察二維空間活動的一切，例如：觀察爬行中的螞

蟻，但運用上述的第(2)點，高斯用數學的觀點證明如何在自身的維度中看清所在的世界，人類是可以在自身的維度中而不需要到更高維度來認識所處的世界，他不會只被表象所侷限住，他總是能看穿表面，並且尋找背後存在的真理，進一步推展出不同的幾何觀點，發現了地球不僅不是平的，但也不是一個完美的球體，而是一個接近橢圓球面的形體（葉李華；李國偉譯，1997：58）。下一節是非歐幾何中重要的兩個理論，其中一個更是阿爾伯特·愛因斯坦（Albert Einstein1879-1955）相對論的基礎，再次將幾何的世界往前推展了一大步，讓幾何的世界可以同時存在幾種不同的可能性，而這些都是對第五公設持懷疑的態度，然後願意創造出、假設一個想像世界的存在，再以嚴謹的理性推理而得出的豐碩成果（洪萬生；洪贊天；林倉億合譯，2013：157, 158）。

二、尼古拉·伊萬諾維奇·羅巴切夫斯基（Nikolai Ivanovich Lobachevsky 1793-1860）

羅巴切夫斯基是第一個發表雙曲幾何（hyperpolic space）觀念的人，而與他同時期的鮑耶·亞諾斯（Bolyai Janos 1802-1860）及高斯也都有了相關的概念。他們幾乎是在同一時期都針對「過直線外一點，存在多於一條直線與給定直線平行」的幾何系統提出看法並且給出合理的論點。這樣的新穎觀念雖由羅巴切夫斯基提出，但他給不出具象化的陳述，直到朱爾·亨利·龐加萊（Jules Henri Poincaré 1854-1912）才將其用簡單的具象化呈現（陸劍豪譯，2002：145, 153）。雙曲空間中，重新定義角度及距離的測量，並善用「高斯曲率」，成功地開創出幾何新觀點，龐加萊將角度利用切線來研究，長度則是兩點依照所在空間的「最短距離」給出簡單形態的具象說明，圖 3-8，圖中的紫色虛線與過 *P* 點的所有紫色線都是平行的。

在雙曲空間中，成功地開創出：過直線外一點，存在多於一條直線與給定直線平行。在這個空間系統，除了平行線的關係與歐氏幾何系統不同外，其餘的公設與公理都是一樣的，且在邏輯演繹的過程中也都不會產生矛盾，是一種真實的存在，是一種可靠且深具價值的空間。

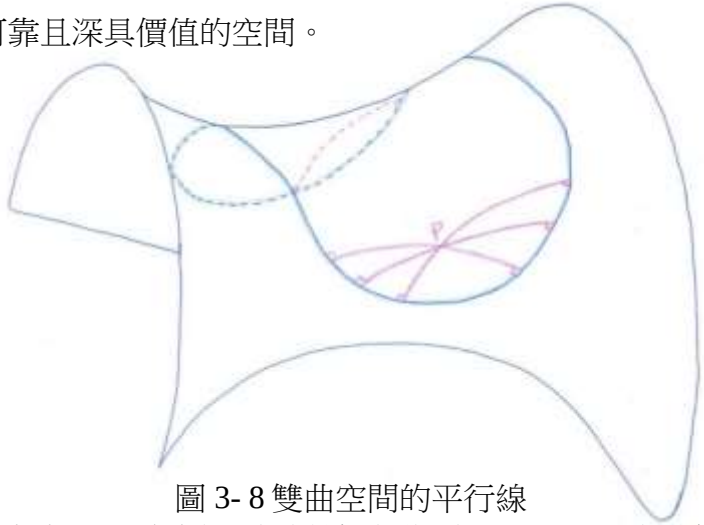


圖 3- 8 雙曲空間的平行線

資料來源：研究者整理自路劍豪（譯）（2002：145, 153）繪製

三、伯恩哈德·黎曼（Bernhard Riemann 1826-1866）

如果用出版的書籍與發表期刊的數量評斷一個人在學術上的成就，那榜單上大概找不到黎曼的名字，將他對數學的貢獻集結成書，也就只有薄薄的一本，但黎曼對數學，甚至可以說是科學的影響絕對有舉足輕重的地位（葉李華；李國偉譯，1997：94）。天才型的黎曼，當時提出的觀念因為太過前衛，加上社會普遍還停留在歐氏幾何的框架下，所以並不太能被當時的學者所接受，就算在現代，也只有少數相關科系的師生有能力深入研究，筆者只能從科普書的簡易介紹中，粗略理解它理論中的主要意涵，至於推論過程，也就非筆者能力所及。

以我們居住的地球為例，並把它當成是一個完美的理想球體，在這空間中，兩點的最短距離是通過兩點的「大圓[17]」，在我們的日常生活中，我們可以將腳下所踩的大地視為一個可以無限向外擴張的完全平坦大地，並無任何的彎曲。但現代人都知道，地球是一個球體，代表我們所踩的大地必定有彎曲，只是因為地球相對於人類大得太多了，所以我們感受不到它彎曲的程度。黎曼以新的觀點重新看待彎曲空間的幾何特性，重新以「過兩點的最短距離」來定義兩點所形成的直線關係，在球面中，過兩點的直線是通過兩點的「大圓」，而球面空間的大圓必交於兩點，所以在此平面上的所有直線必交於兩點，不存在沒有交點的兩相異直線，也就是沒有平行線的存在。這樣的觀點帶出了特別的新視角，好比兩個人一開始背對背沿著同一條直線（大圓）行走，兩個人是背離；還是接近呢？如果我們站在一個半徑 1 公尺的圓內，若圓不斷擴大，半徑變成 1 公里、上萬公里，甚至更大，還能說是站在圓內嗎？還是變成在圓外了（陸劍豪譯，2002：171, 172），這樣的觀點與投影幾何相同，也出現了內外翻轉的現象。

從笛沙格開始的投影幾何，經過羅巴切夫斯基的雙曲幾何，再到黎曼的橢圓幾何，翻轉了歐氏幾何的概念，必須跳脫於身處的周遭環境，跨越原本的所學所知，不滿足於原本存在的知識，給出看待事物的另一種可能性，讓想像拓展，讓空間感擴大，企圖以涵蓋整個宇宙空間的論點，解釋地球上也感知到的共同性，過程中不會失去原有的重要觀察，也保有邏輯推論，勇於嘗試新立基點，檢視舊有的概念，重新以更全觀方式看待所有幾何空間，企圖以全新的觀點描述幾何空間。對既有的觀念保有開放性，在探索的過程中，保有思考，並且提出反思，先以寬廣的想像力，嘗試理解所有存在的整體性，再用嚴謹的態度，全面檢視各種可能性，不被既有的現象侷限，自由的想像力是突破現狀，得到新觀點需要具備的珍貴價值。

[17] 大圓：在球面上，以球心為圓心所畫出的圓。


國立東華大學
NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

第四章 投影幾何課程設計的理論基礎

從第三章的探討，可以知道自由想像對幾何發展的重要性，若是再仔細區分，可以分別對自由與想像做更深入的探討，兩者都是美感教育的其中一環，也越來越被現代教育所重視，已經有很多學者提出關於美感的看法，也提出了他們的理論基礎，本文第一節以伊曼努爾·康德（Immannuel Kant 1724-1804）及魯道夫·史代納（Rudolf Steiner 1861-1925）所提出的相關理論為基礎，釐清美感教育的重要意涵，探討自由與想像如何在人的心魂作用著，從中確認兩者的重要性並找到方法，培育學生能擁有這樣的能力。第二節釐清何謂數學素養，探討數學家對美感的想法，確認數學素養與數學思考間的美感意涵，對照華德福的教育理念及自身的教學經驗，確認自由想像與數學教育間的關係。

第一節 美感教育

本小節分成兩個部分，以康德關於美感的看法，及魯道夫·史代納的華德福教育觀點，從中確認自由與想像在美感中的重要性，整理出適合現代的美感教育。

壹、康德的美學理論

康德在理性批判的時代背景中，提出經驗主義中的美感著重在經驗現象世界的快感；理性主義以完美為前提，把邏輯演繹的真、行動實踐的善、經驗感覺的美混為一談，而這之間需要以「判斷力」來為兩者搭起橋樑（崔光宙，1992：6）。本段落先分析康德對美的四個判斷，再探索對崇高的分析，最後以精神自由做結尾。

一、美感判斷

康德給出關於美感判斷的界定：「決定一事美與不美，非僅認知上理解一對象，而是想像力與理解力相互協調的自由活動，並與主體快與不快的感情相聯繫」，並對美感判斷力提出四個要素（崔光宙，1992：8）。

1. 快感（Pleasure）：

與對象並無存在利害關係下的一種判斷，由內在自然產生的一種感受。當人接觸一個表象時，會從心理產生主觀感受，此時會有兩種情況，其一是受到表象的利害關係影響而產生快感或不快，這種狀態下的快感就是一種偏愛，而不算是純粹的美感判斷。另一方面，心中對美的判斷與這個表象的存在無直接的關連、無利害關係，在純粹的觀照之下，對此表象做出純粹的欣賞判斷（宗白華譯，1987：41）。快感是一種單純使人產生愉悅的感覺，算是一種無理性的動物本能，而美感是無利害關係的，是單純對美的欣賞，是從內在心裡自由的產生出愉

悅之情（宗白華譯，1987：46）。當我們對一個表象進行判斷，如果是依據一個概念而來，就會是一種理性的邏輯判斷，在主觀的感情下做出判斷，才算是自己的美感判斷，雖然與快感有一定程度的共生關係，但並不相同，可以說快感是美感的必要條件，但不是美感的充分條件（崔光宙，1992：9）。在任何一堂課程學習中，如果是因為考試壓力而被迫認真聽講，是為了能在考試獲得高分而感受到學習過程的快感，這就是有利害關係下產生的快感。單純欣賞課堂發生的一切，不管是老師的課程安排、教學風格、學習內容所引發的快感，從中得出無利害關係的判斷，引起自身情感上的滿足，就是一種美感判斷。

2. 理解力（Understanding）：

不憑借著過往的概念，而是一種普遍令人可以感到愉悅的美感經驗。當我們對一個事物判斷為美時，每個人都可以有他自己的看法，是不需要依賴任何概念就可以感受到的，是一種單純的感官判斷（宗白華譯，1987：51）。審美判斷是沒有權力要求別人也同意我們的判斷，每一個人都有自己的感受，會有屬於自己的感官判斷，但一個事物是否為美的判定，並不是任何一個人說得算，當自己在判定事物為美的同時，假定別人有同樣對此事物感到美，同時將別人的感覺也一併考慮進來，是一種普遍性、具有經驗的評斷能力（宗白華譯，1987：49）。這是一個客觀有效的概念判斷，具備有邏輯性，經過一定的推理過程，得到具有普遍性的概念，在審美判斷中，是一種主觀性普遍而有效的特殊判斷，雖然是主觀卻又要具有普遍性似乎有著一種矛盾，所以要去除僅僅在感官上的愉悅，必須要對每一個人都具備有效性，可以普遍傳遞在人的內心之中，這是作為鑑賞判斷時一個基本的要求（宗白華譯，1987：52, 54）。在一般性對於一切智識的認知之中，我們憑藉著自由的狀態，以自己的想像力，在沒有概念的前提下，先於內在的快感，對於每個人都有效情況下，主觀的找出表象所存在的普遍性美感，而做出普遍令人愉快的美感判斷（宗白華譯，1987：57）。關於理解力通常有兩個面向，以一個特定的概念或以普遍的抽象原則來理解、分析事物，在看到一個事物的表象後，從情感面進入認知的層次。如果以理性思維做邏輯判斷比較體會不到過程中的美感，若能以自由的心靈，藉由想像力從中協調、省思產生美感判斷，享受過程中的美感經驗，會是一種客觀的合目的性（objective purposiveness）（崔光宙，1992：9, 10）。

3. 想像力（Imagination）：

想像力的美感判斷是只要符合形式完整的目的性，是一種無目的的合目的性（a purposiveness without purpose）。對於鑑賞的判斷是不能以主觀的判斷為依據，是要對每一個人都有效，是一種主觀的合目的性，卻不能有任何的目的性，在我們觀察一個表象時，我們是以一種普遍性在覺知，而沒有依賴任何一個概

念，這時我們甚至是以一種超越經驗的主體感受，以一種自由的方式來覺知（宗白華譯，1987：59）。在感覺的純粹中，就好比繪畫時，以素描的方式，不關乎任何的繪畫技巧，不受顏色的干擾，不受有沒有用的影響，就只是單純的經由它的形式給人愉悅的感覺，是在普遍法則中，在心魂活動中協調出一致的內在情感（宗白華譯，1987：63）。當我們能成功的臨摹一個範本也僅僅只是表示我們有了一定程度的鑑賞能力，我們不能經由概念來達到，更需要以一種稱為美的理想來達到，在對表象懷著巨大的興趣下，同時不受感官刺激而產生愉悅的感覺，並不能稱為純粹的審美，透過理解僅能說是一種鑑賞判斷，而不是美的理想評判（宗白華譯，1987：74）。相對於理解力是由客觀認知的經驗，想像力則是從心靈深處帶著部分經驗堆疊而形成，融合了理性與感性、連結了特殊性與普遍性，保有形式上的純粹，也讓事物的本質意義更多樣豐富。（崔光宙，1992：11, 13 ）

4. 共通感（Common sense or senus communis）：

美不需要經由概念而得，是一種主觀必然性的判斷。美有種不屬於理論性質的客觀必然性，是一種具有特殊性質的主觀必然性，經由一個純粹的理性意志，以一種自由的方式讓每個人都能感受到愉悅，這種美的必然性不會從一個特定的概念而來，也不屬於經驗的普遍性，是一種無條件且透過情感的主觀必然性（宗白華譯，1987：75, 76）。經由一種共同的情感，由情感調節想像力及理智，使兩種的力量推動出一個和諧的關係，並非令他人同意我們對美的判斷，而是對美的本質表示贊同，每一個人彼此符合一致的必然性，讓所有人都能統一於一個具有共通感的概念之中，我們可以說美是不依據概念而得出的一種必然性的愉快判斷（宗白華譯，1987：79）。從個人的美感判斷中尋找共同的普遍性原則，依據情感擴展到群體，使不同族群、不同地域、不同文化的人都能拓展視野，將美感判斷提升到一個更圓滿的層次。（崔光宙，1992：14）

在康德的觀點中，想像力和理解力同等重要，雖然在認識事物的過程及道德規範中，想像力是會受到限制的，人類使用各種感官的同時，若能與想像力一起搭配使用，可以有效發揮想像力的作用。可以使感官彼此更加和諧，更加甦醒，愉悅感將油然而生（方永泉，2003：76）。相對於理解力通常有一個目的性的追求，跟理性主義一樣，有其特定追求的目標，是一種客觀的合目的性。而想像力並不會受目的性的影響，卻又有它想追求的目標，是一種無目的的合目的性（a purposiveness without purpose）。以創造力作為經驗與超經驗之間的橋樑，在接觸表象時，不斷的跟舊經驗做連結形成一幅幅圖像，以自由的心靈狀態做出判斷，有時這會是一種似乎來自天啟的靈光乍現。在數學的世界裡，所有的「模式」都是早已存在的，等著人們去發現，當對的時機來臨，我們將初探到那個奇妙、原

始的時刻，是需要一種類似神蹟的崇敬，那是來自上天的訊息，並不是我們可以刻意追求到的，它會傳達出問題最核心的意義，而這是數學帶給我們最純粹的意涵。就想像力的本質，能從人的經驗中歸納出美感的一致性，形成一種共同的規範；並且有表達抽象的人性共同價值觀。（崔光宙，1992：11-13）

康德在《人類學講稿筆記》（Anthropology Lecture Notes）提到：從已知規則中推衍出其他規則，是一種才能，不是天才，天才的事不是根據規則就可以取得的。研究數學時，例如：一道畢氏定理的證明題，選擇哪一個規則、捨棄哪一個概念、注意哪一個觀點、想像可能的方向都沒有一定的脈絡可循，這也是畢氏定理的證明方式可以在人類的歷史中呈現出數百種。特別的是這一種數學特性符合康德對想像力的觀點，因為該從何處下手研究數學問題，是想像力與知性之間自在的彼此交織的過程，是需要合目的性的（李淳玲譯；2011：167, 172, 174）。在中學生以解題為主的數學學習中，多題一解、一題多解都是給學生關於自由想像很美的經驗過程。而教育部對美感的意涵著重在感官的部分，並在最後提到與理性的調和，數學需要感官的經驗搭配理性的思考，並輔以意志來完成整個過程，才能在內在奠基最具美感的生命果實。

二、優美與壯美

康德認為優美與壯美都是令自身要感到愉快的，而且兩者的判斷都不是依據感官而定，也不受任何的概念所影響（宗白華譯，1987：83）。優美是由主體在觀察客體時，藉由形式判斷，可以被理解，經想像之後加以掌握，而得到的愉悅情感經驗；壯美是當客體不以特定形式出現，主體的理解力、想像力受到挑戰，產生痛苦情感，經由消化吸收之後的經驗（李崗，2006：48, 49）。當我們觀看一件事物而覺得優美，是不會受到本身的貪欲、與對象之間的利害關係所影響，也不會受任何概念的牽絆。是在不受理性限制、不被自然法則約束的狀態下嘗試理解、想像其形式的存在，主體可以自由協調與平衡對客體所傳遞出來的現象，在有限的範圍內，感受到客體在數量的多、形體上的大、力道上的強，從主觀的感受中產生愉快的心情，藉由感受對象普遍存在的形式，而有一種單純會被客體必然引起的愉悅快感，是一種主觀的符合目的性（宗白華譯，1987：83）。而壯美有著理性概念的基礎，是心靈上的改變，一開始會面臨在理解過程中受挫，無法看清事物的本質、想像力受到壓抑，陷入無法保有自由的恐懼之中、出現抗拒的負面情緒，再經由不斷的反思尋求突破，專注於喚醒讚嘆、崇敬的正面情緒，原本不存在於客體表象經驗中，主要是主體在心靈上的轉變後而獲得的美感經驗（宗白華譯，1987：83-86）。

投影幾何在思考上會因為不斷觸碰各種關係而產生疑惑感，就相當符合康德在壯美的所提到的主體心靈上的改變，故本文對壯美進行更深入的探討：

1. 數學的壯美

壯美是超越感官的，凡是感官可以覺察到的，就不會是壯美，壯美所談論的大，是絕對性的，我們無法以任何的尺度來衡量，只能從內部來看待對象的大，而無法從外部來獲得，壯美不存在在自然之中，只能透過人的心靈，從內存於我們的觀念之中去尋找，其他的一切與壯美相比都是小的。透過想像的自由揮灑，能將理性的思維拓展到無限的領域，將原本需要以特例呈現的關係，轉換成為一種絕對性的整體表述，成為一個現實存在的概念，在內部喚醒一個超越感知的特殊情感，是感官世界對量的估算所無法企及。壯美來自於我們自身內在的精神情感，而不是來自那個對象，想確認壯美超越任何感官所能覺察的狀態，我們唯有對壯美進行思考才能達到（宗白華譯，1987：89）。在數學上，人們總是不斷的理解眼前所見的表象，為此無止境的累積知識，然後為此進行歸納，理解越多的知識，就會出現越難進行歸納的可能，當這情況到達一個高點之時，就是審美的最大限度了（宗白華譯，1987：91）。而無限就不同了，無限與其他的量相比，是絕對性的大，靠著想像力提供圖像，並且有邏輯性的對無限進行一個有目的性的客觀概念思考，是一種超越感官的心意機能來看待一個整體的思想，通過這樣的思考過程將感知世界裡的無限概念與純粹理性中的無限融合在一起，作為感知的擴張，超越感知的侷限（宗白華譯，1987：94）。在自然的量中，一座山的宏偉，一座島的大，一個地區的無邊無際，這都關乎我們與所視之物的相對位置，身處其中而感覺它的巨大，拉遠距離顯示出彼此的相對關係，這都關乎以哪一種尺度來看待，地球何其之大，進入星系，從宇宙的構造來看，似乎又是另一種層次的問題，這是自然之中絕對的全體性，所有現象堆疊成一個無限，用上所有的想像力，也不一定能得到結果，一切在大自然的面前都顯得渺小，想像力也被淹沒在無止境的長流之中。就算想要以理性為基礎，創造出可以相呼應的新概念，企圖超越感性的大，都可能在大自然的面前消失得無影無蹤（宗白華譯，1987：95, 96）。無限是古時候人類害怕接觸的境地，它會帶來感官的疑惑、不愉悅感，會失去數學中重要的規律感，擴大想像力探索無限的可能性，從理性的邏輯推論中，找出包含絕對全體的概念，以壯美的愉悅感來欣賞著理性概念的形成，這樣的愉悅感是必須要先有感官上的不愉悅感，才有可能得到的（宗白華譯，1987：100）。

2. 力學的壯美

自然界的地震、風災、火山爆發…等等常會激起人類的恐懼，這些自然界的種種可怕現象卻也吸引著人類想要不斷的了解其發生的原因，只要我們能在一個相對安全的地區看著這些現象，是會生出對自然界力量的讚嘆，雖然我們的能力無法與之抗衡，但此時的精神力量卻可以超越平常的時刻，會在內心深處發現一

種超越自身而不可度量的大自然力量（宗白華譯，1987：101）。雖然就現實情況而言，人類只能臣服於大自然的威力之下，但也因為被大自然的力量所震攝而在我們的內心裡有一股精神力量被喚醒，我們以寧靜的心、完全自由的思維，從內心喚醒對那本質所具有的壯美，我們感覺到一股使命，因著這股精神力量使內在的壯美超越了大自然，雖然在現實之前，人類看起來顯得無能，但在我們內心深處卻可以感受到背後隱含著崇高的真理，我們可以說來壯美不是存在於大自然的事物之中，而是藉由大自然的種種現象，引發出我們內在對於壯美之情（宗白華譯，1987：102, 104）。

三、精神自由

理性是一個人身而為人的本質，理性就等於是自由，所以康德稱其為「純粹理性」，純粹理性與一般的思考、進行邏輯推論是不同的，它是存在本身，是做為主體、實體和本體的「存在」（崔宜明，2010：45）。通常我們視理性為認知的能力，而意志為行動的能力，認為兩者是不同的。康德認為人有自己的自由意志，不論是在認知上或行動實踐上都是由理性所決定，人的自由意志不受任何的生理因素、社會規範所影響，而是依據自身的理性來做出行動（崔宜明，2010：48）。在行動上要自由，就要依照自己訂下的定律，而不是服從天性或社會規範等外在的羈絆。要能勇敢地去認識世界，就要大膽運用自己的理性，所以學習是從自身開始，只要不侵犯他人的自由，所以的一切都可以去追求。在康德的自由觀中，是不受限制，調和內在的各項機能，達到各方面的協調，要能夠自主，不受外界任何事物影響自身的決定，是可以放諸四海皆準，並且以人為目的。雖然身處感官世界，受自然律的影響，但行動背後所依據的是理性，是純粹以理性為基礎而做出決定（樂為良譯，2011：143）。想像力從心靈深處帶著部分經驗堆疊所帶來的精神自由，它不像理解力有一個特定的目的，不受限於任何形式的自由，藉著心靈的自由奔馳尋找出事物最初的純粹性，展現出它獨有的自由美（free beauty）；同時在更理解概念的情況下，衍生出更多的想法尋找到事物豐富的樣貌，是一種附屬美（dependent beauty）（崔光宙，1992：12）。康德對自由的概念不受自然環境、內心感受、道德規範與科學定律所束縛；是快感、理解力、想像力與共通感彼此發揮作用、互相影響（崔光宙，1992：218），融合理性與感性並取得平衡點，連結特殊性與普遍性，保有形式上的純粹，讓事物的意義更多樣豐富。

在審美判斷時，將自己的主觀感受轉化為普遍的共通性，可以超越個人的好惡，以一種客觀的態度去評價。而自由在這當中扮演著關鍵的角色，當一個人能夠放下主觀的好惡、個人的慾望，在一個普遍性的立場上，自由讓人真實感受到美的存在；在不基於特定文化或某種社會的立場上，自由超越彼此的界限，找出

普遍的意義和價值，成為一種普世體驗，超越文化限制的美感經驗；在感知的過程中，自由不受實用性和特定目的拘束，擺脫任何利益的考量，讓心靈遨遊在美的氛圍之中，得到心靈豐富且充實的內在經驗。要能達到自由，是以一種「無目的的合目的性」的態度去感知美、去欣賞美，以獨立思考及判斷的能力，擴大自己的想像空間，真實表達自己對美的體驗和理解，從主觀中找到普遍性，超越傳統的價值觀念和社會期望，以普遍性的立場進行美感判斷，轉化成共通的規範，結合理性與感性，使自己能自由地在美感的領域中有深度的感知並運用思考。

貳、史代納的教育美學

史代納的華德福教育強調藝術性，不僅是學習者要注入藝術涵養，教師本身也要做藝術鍛鍊，豐富自己的身心靈以便能夠引領學生朝正確的方向發展，以崇敬的心認識學生的靈性；帶著熱情接觸現在遇見的學生；小心翼翼的保護著學生原本的樣貌（孫愛萍譯，2016：40）。不論在有形或無形中處處具備美感，美就像空氣一般，圍繞在身邊存在著，並不需要特別強調。而自由是史代納的核心概念，教師要小心呵護成長中孩子內在的自由探索，不能讓一個概念以「死亡」的姿態出現在孩子面前。而想像是重要的立基點，是教學三步驟中首先要注意的事情。本段落從這自由與想像兩方面切入，找出這兩點與美感的關係。

一、自由

「在我的胸中，住著兩個心，
一個想從另一個掙脫掉
一個在粗鄙的愛欲中
以固執的器官附著於世界
另一個則努力超塵脫俗
一心攀登列祖列宗的崇高靈境。」

《浮士德》I，1112-1117

史代納的想法帶有極高的靈性觀點，他在《自由的哲學》一書中引用了上述歌德的一段話，一個心屬於物質世界；另一個心則來自靈性世界。史代納對自由提出了這樣一個大哉問：「處於思想和行為（Handeln[18]）中的人是一個靈性自由的存在（freies Wesen），還是被束縛在一種純粹自然規律的鐵一般的必然性（Notwendigkeit）之下？」（王俊譯，2017：11）。對人而言是否有意志上的「自由」，是多數人一直思辨的問題，有人視之為人類最珍貴的資產，也有人認為那不過是自然法則下的必然性。當嬰兒感到肚子飢餓，是遵循內在的意願而哭泣尋求食物嗎？當一個處在青春期的國高中生出現叛逆行為，是基於自由意志對

[18] 王俊翻譯《自由的哲學》一書，是從德文原版直接譯成中文，所以括號內為德文。

抗世俗的教條嗎？當課堂中引入無限的概念，學生是依自己的意識接受或抗拒該觀念嗎？一個行動者對自身行動的起心動念並無意識時，他們是處在不自由的狀態下，就好比在自然定律下，所有的東西都會往下掉一樣，是受外在束縛所羈絆的；而當行動者意識到自己行為的原因，清晰的掌握住每一個行為的背後動機，才可以說是自由意願下的行動。嬰兒是在無意識的狀態下，單純因為肚子餓而哭泣，是不自由的（王俊譯，2017：16）；處在青春期的青少年若無意識到自己為何要對抗教條，無意識要獲得到哪一種結果，是不自由的狀態；在聽到無限的概念，單純只是因為老師的威權而接收，也是一種不自由的意識行為。反之，若是經由與過往的經驗進行辯證，有意識地思辨，則是自由的，因為這個決斷是由行動者自己的內在決定。我們可以說，真正的自由是需要倚靠思考的力量來完成，而思考可藉由感知來認識世界、了解自己。感知是思考的基礎，經過思考才能達到真正的自由，下文將從這兩大方向來理解史代納關於自由的觀點。

1. 感知—思考的基礎

所有的自然現象早已存在，人唯有透過我們自身感知器官的變化過程去感受每一個現象，運用思考將不同的概念組織起來，才能得到最真實的感知。一個人要從對一件事物的感知中，進而形成一個整體的概念，需要本身有意願的參與其中，想對一個事實進行解釋，先把自己抽離出該事實之外，意識到自己與世界的不同，是相互對立的兩個部分，但同時又不喪失情感的知道自己屬於這個世界，是世界中的一份子，不斷的透過思考尋找到自己與世界合一，我們從所觀察的現象法則中，運用思考探尋到背後連結的定律，將世界存有的法則一一轉化成我們的思維內涵（王俊譯，2017：26, 27）。當我們抽離出與表象的關係時，就會與表象產生離斥感，也因為這一種離斥的關係，我們才能更看清楚表象中所要傳達的概念，也才有機會藉各種方式來理解展現在我們面前的表象，也就是說我們因離斥而獲得了概念。另一方面，當我們有了夠多、夠深的理解之後，才有機會與表象連結在一起，產生融合感。如果一開始就與之融合在一起，是無法看清各種表象之間的差異（芮虎等譯，2014：48, 50）。感知是認識世界的基礎，每個人都會有屬於自己的感知，透過自我內在的思考辨證，才能從中獲得屬於自己的概念。

2. 思考—自由的基礎

唯有透過自己思考才能形成屬於自己的概念。一個自然現象的定律法則要在自我的心中成形，首先要觀察，對事件的表象進行觀察，再藉著「吾」參與其中，對整個過程進行思考，才有機會形成屬於自己的內在概念，從觀察到思考，一定要有我的參與才算是真正的存在（王俊譯，2017：37）。當老師在教分數的

加減時，可以用披薩切片的方式讓學生看見等值分數[19]的關係，接下來才能進入分數量的加減，當學生未能將具象的分數量內化為自己的概念，就會進行無效的計算，很容易直接分母加減、分子加減得到新的數值，而不是通分成相同分母再進行分子的加減，而要令分數加減的概念進入學生的思想之中，唯有學生願意將觀察到的現象，經過自己的思考，才能形成自己的概念，才會在下次遇見相同的關係時，運用同一個概念進行運算。

當自然現象發生時，思考只是一個配角，而我們開始尋找每一個相同的發生都會對應到相同的結果，在形成概念的過程中，思考就會轉變為主角，透過思考將概念清晰化，內化為自己能掌握的概念。而思考究竟是怎麼出現的呢？自然現象先於我們早已存在，所以我們很容易對自然現象進行觀察，而思考卻是自己創造出來的，與笛卡爾提出的「我思故我在」些許的不同處在於，這裡出現的「我思」是與「我」同時存在的，這個我並不單純是指身體上的存在，而是以一種靈性存有的方式住在一個身體裡，在思考的同時，我與思考就會同時出現（王俊譯，2017：46）。唯有我創造出思考，思考才會存在，如果我們對這個思考要進行觀察，就不可能在思考的同時一起進行，而是要將自己提升到另外一個層次，帶著更清澈、更寧靜的心；以中立的態度對思考進行回顧式的觀察（王俊譯，2017：50）。唯有透過我保有自由、開放的心創造出屬於自己的思考，雖然思考的內容會有對、錯之分，但一個人思考著就是一件對的事，如果我們反覆的觀察著自己的思考，確認自己是如何進行思考，也就能將思考更清晰化，並且在思考之中找到思考的本質（王俊譯，2017：57）。

3. 自由的觀念

從感知到形成概念是透過自己內在的意識經由思考而形成，這是人類獨有的生命特徵，將每一個在眼前的表象經由思考產生行動力去追尋理解自身所在的世界與自己的關係，雖然世界的存在具有每個人都會感知到的普遍性，但每一個概念的成形都不是經由外在的權威直接賦予我們，必須要經由自己的意願，以自身內在的思考統合成個人的觀點，當人建立屬於自己的觀點，以一種近似直覺般的行動，才會是自己真正的行動，自己才會是行動者本身（王俊譯，2017：99）。當他意識到應該去做一件事，他就會去完成，不受外在的規範所影響，是受行動者自己內在的意願所驅動，只有這樣的意識行動才是真正個體的自由行動。自由的行動並不會排除任何的法律、道德或任一種自然法則，而是將之納入自己的思維之中，自由的人活在信任之中，他相信，每一個自由的人都與他擁有相同的世界，他們會彼此相遇，雖不要求大家都要和諧一致，但卻如此的期待著。生命中

[19] 等值分數：將一片圓形披薩對半平均切成兩份，每份佔全部的$\frac{1}{2}$，如果將一整片平均切成四份，取其中 2 份，得到全部的$\frac{2}{4}$，所以$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$，即為等值分數。

總是存在著自由與不自由的行動，而每一個完善的行為，是只有自己才能給予自己的，人不是為道義而存在，而是道義通過人而存在（王俊譯，2017：170, 177），由個人以自己的方式認識世界，自己決定是否遵守任何一種法律或道德規範，但不放過任何一個細小的內在聲音，檢視每一個產生於腦中的念頭，才會是一個真正自由的人。

一個教育工作者理解到課堂上要傳遞出的概念，是存在的普遍性及必然性，而學生必須要經過自己內在的思辨，為自己的思想與概念做出屬於自己獨有的連結，帶著自己的意識，用自己的思考，以自己的力量得到相關的概念，不論是哪一位學生都可以在老師熱情的教學過程中，透過良好的課程設計引領學生到達那個美麗的殿堂，而那個殿堂有無數多條路徑可以到達，每一位學生都能自由的為自己鋪設一條思想的康莊大道來抵達。

二、想像力

我可以跟藝術家一樣，
自由揮灑我的想像力。
想像力比知識更重要，
知識是有限的，
想像力卻可以囊括整個世界。
邏輯能讓你從 A 到 B；
想像力能帶你去任何地方。
阿爾伯特·愛因斯坦 Albert Einstein 1879-1955

在自由的狀態下，開放自身的想像力，能幫助自我更容易獲取概念，史代納認為人是有超感官的感知能力，而想像力是其中的基礎階段，是教育中一個重要的路徑，才能在往後的學習過程培養出靈感，深化成直覺。史代納關於想像力的說明，是需要一顆開放的心在腦中建立一幅幅流動的圖像。

1. 想像力：感知的開放

要能讓想像力得以發揮，需要開放感知，並且做邏輯性的思考。史代納認為想像力一詞有很深層的意涵，是一種超感官的知覺，是要超越清醒的意識，是一種「觀察著思考」狀態的純粹思考。透過每日的回顧，以圖像式的思維模式訓練想像力的開放度，讓想像力得以在有意識的狀態下從內在能自由的展現（Barton, 2019: 1, 2）。一個人在對一個客體進行認知的過程中，首先是透過感官去感知，產生對客體的認識，但是若無外在之物，就需要透過想像力的幫忙，相對於無意識的幻想，此時的想像就要取代感官感知，透過自身內在的心魂，甚至來自靈性般的天啟以便能夠得到圖像（Barton, 2019: 7）。在

史代納提出的教學三段論中—「連結[20]」（conclusion）、判斷（judgement）、概念（concept），首先就是要在一個清醒的狀態下，透過意識與過往的生命經驗做出連結，這當中帶有相當程度的想像空間（芮虎；李澤武；廖玉儀譯，2014：205, 210）。以數學中三角形的外心為例，若一開始就為外心下定義，會令外心這個概念的鮮明色彩瞬間失去它的美感，讓學生失去品味發現數學關係的樂趣。若改成讓學生各自任意畫一個三角形，再畫出此三角形的三邊中垂線，接下來就讓學生們自行觀察每個圖形彼此之間的特徵，讓圖像在腦海中一幅幅的流動著，由每一個圖像對學生傳遞出它的共同特性與彼此的差異性，保持心胸的開放度，自由的觀察圖形間所要傳達的秘密訊息，再依循、善用自己過往的相關概念，對整體做出邏輯性的判斷，得到更進一步的新概念。

2. 想像力：圖像的流動

在華德福的幼兒教育中，沒有單一功能的玩具，在遊戲時，所有的物品都是可以被拿來做任何一種角色的扮演，孩子們透過想像力來跟大人傳給他們的一切作融合，運用豐富的想像力，與所有的藝術活動來拓展自己的心魂（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：44）。人每天都在經歷三件事：與個人的內在心靈相處、跟日常生活的自己為伍、對所處世界發生的事務做出連結。而這種種的發生可能出現好事，也可能是諸多不如意之事，如果我們深陷問題的深淵，將會無法自拔。透過冥想（Meditation），可以使心靈中的內在圖像發揮作用，覺察到自己的內心似乎會被一種突如其來的聲音進入，與自己內在的想像世界做出呼應得到來自靈性世界的力量與勇氣（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：118）。冥想是自己的決定，是因為內在願意相信冥想的力量才有可能願意去做，是一種自由的行為展現，沒有一個人可以被強迫，是對冥想對象的愛所引發，以求轉換心境，覺察到原本未能感知到的地方，運用想像力得到追求解決問題的契機，進而能夠幫助自己將待完成之事圓滿解決（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：119）。人們總是希望將一切準備就緒，想規劃好待做事情的每一個步驟，對學習也總會有按部就班的期待，會害怕自由的思考，若是這樣，我們將失去從自由判斷中擷取靈感的機會。我們可以準備周全、規劃好做事情的步驟，但我們更可以在做好這些的同時，放下心中的期待，透過冥想用想像力迎接來到面前的挑戰，具足追求真理的勇氣，強化心靈責任的敏感度（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：122）。史代納的冥想練習詩：「在感官體的表象中，有著精神的意志，好比智慧之光照亮四周，又蘊藏著內在的力

[20] conclusion：中文通常譯為「結論」，因為文句翻譯的過程容易有情境上的誤解，造成對原本意涵產生混淆。若將 conclusion 做字根拆解，con 的原意是 with，也就與什麼在一起的意思，sion 是做什麼的過程中，而中間的 clus 原意是 close，有結束、緊密之意。所以 conclusion 有著「帶著過往感知的經驗與眼前所遇見的情境緊密在一起的過程」。這裡史代納的意思比較適合翻譯為「連結」，而不是原本字義上的「結論」。

量…」，透過冥想，我們能找到那一股內在的力量，才有機會善用那一股力量（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：125）。

傳統上對於想像二字一般的解讀是透過意象的形成，以自身的各種感官去覺之，與思考所需的概念整合出一個圖像。而圖像可能是非常具體，也可能異常模糊，其訓練方式依各年齡有不同的方式，孩童時期多以聽故事的方式，青少年之後可以使用自由聯想的方式，自由的依循內心真實想法，真誠的，不受限制的表達出來，心理學家榮格以積極想像作為他心理分析的方法，從自身出發，透過身心靈的感知並且與生命中的經歷得到一個符合當下面對事物的圖像，猶如一個舞蹈家，想像自身在舞台上的各種肢體動作，與舞台空間、燈光、音樂、想要呈現給觀眾的視覺感受巧妙的結合在一起；一個作曲家，想像各式音符、節奏，不同樂器完美的搭配出內在想要呈現的意境；一個數學家，想像關係的前因後果，在腦中做純思考，試圖找出解決的可能性。人們透過想像讓心靈自由，可以重新感知自身的狀態，並且投射出自身內在的樣貌，如果好好觀察自己的內心世界，將會發現一個形象的世界在當中活動，想像並不必要單獨活動，可以輔助理性的邏輯思考，藉以拓展解決問題的廣度。榮格還提到，當我們觀察自己的內心世界時，會看到一個許多形象在其中活動的樣貌，任何事情都可能經由想像而發生，想像中的世界有它自己的真實樣貌（龔卓軍等譯，2000：32）。在人的一生中，每個人一定都有遊戲的經驗，「遊戲」甚至在教育活動中佔有重要的地位，遊戲在現代有三次轉變：理性駕馭下的人玩遊戲；接受遊戲擺布的遊戲玩人；再到與真實生活結合的遊戲即人生。而遊戲的過程中需要想像，傳遞出「遊戲即想像」的概念，不論是幻想、幻影、創造、靈活…等等也都是想像的代名詞，一個兒童是透過想像主動的將它內在的圖像重現，而當人漸漸成長之後，想像是會跟理性功能連結在一起，幫助問題解決的能力，可以透過想像讓語言具有不同的意義，可以不斷的用新方式重新詮釋（方永泉，2003：63, 72）。每個具有創造性的靈光來源，都可能是因為想像而來，我們應該更重視想像力的重要性。

綜上所述，史代納提到的自由，是先有自由感知，進而思考，最後達到有意識的自由思考。在自由感知時，人比較可以隨心所欲，每一個人用過往的經驗感知任何來到眼前的現象，任何的感受都自由地讓它發生；在思考時，容易受過往知識背景所影響，難以跳脫過往的經驗，需要敏銳的觀察、自由的思考，嚴謹的辯證，既不被過往的知識束縛，又不能失去邏輯理性的思考著，做出最自由的判斷，得到寶貴的概念。至於想像，是要放開感知，讓內在的圖像流動，使之充滿著無限的可能。要啟動想像的能力，必須要放下過往的束縛，開放自身的感知，同時讓圖像有邏輯的流動起來，進而得到來自天啟似的靈感，是與天馬行空的胡思亂想有所不同的。自由與想像是兩種不同的能力，但當一個人帶著自由對觀察著的一切做思考，從中進行想像可能發生的情況，是一種進入自由想像的狀態，

對來到眼前所發生的一切現象，會有更多、更具創意可能的出現。

三、美感發展

華德福教育談論「生命四體」，包含了物質體、乙太體（生命身）、星芒體（星辰身）、自我（吾）。課程依據史代納的教育哲學而設計，注重孩子的身、心、靈平衡發展邁向自由，從意志（willing）、情感（feeling）、思考（thinking）出發，搭配「七年發展論」的架構，將幼兒到成人的學習歷程分成三個階段：0-7 歲著重在身體，用意志來認識世界，相信世界是善的；7-14 歲透過心靈，用情感保有跟世界的融合與離斥，感受世界是美的；14-21 歲發展自我意識，用思考來學習，體會世界是真的（謝易霖，2015：35）。每一項課程、每一次的活動都以藝術性呈現，豐富孩子的美感經驗，對意志的發展會起特殊作用；對情感能更多面向的抒發；對思考能更自由的想像。保有孩子的學習胃口，讓孩子在新奇有趣的情境下樂於學習，是一種發自內在的學習方式。環境也會營造出符合當下課程的安排，讓孩子進到教室空間可以感受到溫暖、放鬆，保有愉悅的心情做學習，這會有助於孩子揮灑他們的想像力，以自由的姿態為自己留下屬於自己的學習經驗。在時間的安排上，配合著大自然的節奏，在每一個季節準備獨有的節慶、主題課程以三周為一個單位教學，一天的學習也注重知識性、實踐性及純藝術性課程的安排，不僅僅是有形的藝術性呈現，更在無形之中處處保有藝術性，在空間、時間、課程安排、心靈情感各方面，全面性的關照孩子的整體發展，培養身心靈的平衡。

1. 意志

意志對應著 0-7 歲，孩子在這個階段總是透過模仿來讓身體有所行動，期間大量使用身體，運用四肢來完成想要做到的事。對於外在感官而言，意志是超感覺的，它在此時的物質體中，是一種本能的展現，而當乙太體掌握住本能之後，就會形成衝動，當星辰身抓住衝動，並將之內化之後，進入意識成為一股慾望（芮虎；李澤武；廖玉儀譯，2014：98, 99）。在動物身上也可以看見本能、衝動和慾望，而人可以從自我之中提升慾望，從內心深處產生動機，在形成動機的這個訊號，史代納稱其為「意志搏動（Willensimpuls）」（芮虎；李澤武；廖玉儀譯，2014：101）。0-7 歲的孩子們需要來自權威的大人們引導他們該注意什麼，在具備意識的情況下重複觀照著原本展現在孩子身上的意志搏動，每天重複的練習對這階段孩子的意志有強烈的幫助，這也是華德福學校強調藝術的另一個原因，此時藝術鍛鍊的一大重點是建立在重複的基礎上，而這種培養意志的方式是迥異於培養智識的方式（芮虎；李澤武；廖玉儀譯，2014：114）。意志透過四肢在自我是一個完全自由的狀態下，有意識地展現出來，當一個人的意志可以越自由的展現，自我的活動就越不需要依賴身體，也就是在運用意志時，我們可以

努力去經驗那股最純粹的自我意志，自由的運用四肢來展現，那怕只是一個小小的行動（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：29, 31）。這個階段不會做太多需要大腦思考的活動，而是著重與大自然結合，發展基礎感官的敏銳度，讓孩子保有學習的熱情，對所有的事物保有好奇心，並且勇於探索事物存在的姿態，用自己的方式認識世界。在時間、空間、內容上都有整體的考量，做藝術性的安排，讓孩子的意志可以充分的展現，為孩子留下美好的經驗。

2. 情感

情感對應著 7-14 歲，與心魂有關，藉著心魂去感受每一件事情的發生。小學是情感的關鍵發展時期，透過大量的藝術課程，豐富的肢體活動與地方探究，讓孩子自然的接觸周遭環境，累積感受自己的內在經驗，在 12 年的國民教育中，有七年著重在情感的養成，注入藝術性的美感經驗（謝易霖，2015：36）。情感是一種認知過程中產生的感覺，同時也是培養意志的一個過程，是由離斥感及融合感不斷交織影響而產生的（芮虎；李澤武；廖玉儀譯，2014：128）。情感是一



圖 4- 1 情感交織關係

資料來源：芮虎；李澤武；廖玉儀譯（2014：128）

種本能的經驗空間，是一股內在的心魂力量，一切的發生都是自我本身的感覺，不斷地與星辰身及自我超越物質體工作著（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：31）。華德福的數學課程分為三個階段，7-14 歲包含兩個階段：第一個階段涵蓋了一至五年級，數學課程與孩子生活周遭的各種活動保有相關而發展，是從孩子自身的內在與外面的世界做連結，讓孩子可以投入情感，也因此他們的思維會變得清晰。第二個階段包括六至八年級，激發出解決數學問題的想像能力，讓孩子透過數字特性的學習經驗，獲得信任感和安全感，相信數字、世界與人類是相連在一 起的，老師在剛開始時給出一些幫助，數學可以很容易的讓孩子們從權威的束縛中解脫出來，並讓他們實現一定的自主性，找到實用的一面。促使“想像性思考（imagination-bound thinking）向概念性思考（conceptual thinking）轉折（Kevin Avison; Martyn Rawson, 2014: 106, 107, 113）。要對感官有吸引力，就需要美，而藝術就是一種美的展現。這階段是華德福教育在有形的美之中，最豐富多元呈現的時期。教室牆面以虹光漆，用特殊筆刷的方式多次漆上不同色彩調和的顏色；

設置季節桌、創作黑板畫、保有學生作品展示區，讓學生待在學校的每一天都被美麗的事物包圍。使用的教具、器皿，所有會用到的東西都盡量是天然的，保有接觸自然的元素。每天帶著學生唱歌、吹笛子，不論哪一種音樂，都盡量以樂器演奏，而非以數位影音取代。不論是在視覺、觸覺、聽覺等等的各種感官，都是以最具美感的形式呈現。

3. 思考

思考對應著 14-21 歲，是思考活動中的乙太體、情感力量的星辰身及沒有任何形體的意志力量的自我，相互配合的工作著（鄧麗君；廖玉儀譯，2007：30），是一種靈性的存有，也是自我一生追求的最自由的一種展現。如果再將意志、情感、思考各個階段再細分成三部分（見表 4-1），在大約國三時期，處於思考中的情感階段，透過觀察培養有感覺的獨立思考能力，是意志中的思考階段，數學中的論證、列舉所有可能性將是從意志中發展思考的最佳途徑之一，到了高中階段是情感中的思考，此時投影幾何課程的安排是最有感、最需要思考的課程設計。

表 4- 1 意志、情感、思考與生命七年發展的關係

年齡	0-7 歲			7-14 歲			14-21 歲		
世界	善			美			真		
心魂	意志			情感			思考		
細分	意志	情感	思考	意志	情感	思考	意志	情感	思考

資料來源：研究者整理自柯勝文（譯）（2005：22）

華德福數學課第三階段是九至十二年級，最顯著特徵是轉而從理性的角度進行分析，由追求知識轉換成追尋領悟，幫助青少年的想法可以在生活中實踐出來，發現事物間的依存關係（interdependence），凸顯社會責任感所產生的影響。在十一年級時進一步瞭解「無限的基本構成要素（elements of infinity）」，青少年應該能掌握無限的概念，這對培養他們純粹理性思考具有相當大的助益，透過這種方式，讓思維的活動空間得到進一步擴展。最後將不同學科領域結合，彼此聯繫在一起，滋養孩子們隱藏於內心的意識活動（inner activity）（Kevin Avison; Martyn Rawson, 2014: 116, 117, 121, 123）。給出孩子獨立思考的機會，保有屬於他們自己的獨特想法，以他們自己的方式理解概念，過程中透過想像力的發揮，在以理性的邏輯推理尋求出合理的答案。透過自由的想像，最後以理性思辨出結果，欣賞到各種事物關係中最本質純粹的美。

華德福的教育不僅僅是學生的學習場域，不論是教學上的需求，還是教師個

人受到啟發想要精進，泥塑、手工、木工、金工、雕塑、繪畫、油畫、書畫、體操、優律詩美、歌唱、管樂、弦樂、戲劇…等，都是每個老師隨時可以選擇加入的領域，筆者自己深受投影幾何點、線構成圖形之美的影響，甚至自己摸索玩起「String Art」，這是一個有形的美感場域，更是一個無形的終身學習場域，培養學生成為一個懂得愛與感謝，能自律的自由人。

第二節 數學教育

處在現今快速變遷的社會型態，學生應該學習什麼成為當代教育最重要的課題，現今教育強調以「核心素養」為主軸，各領域也有必須符合的素養要求，但什麼是素養，雖然已有相當多詮釋與探討的論文及書籍，但並無統一的說法，故本小節先從數學美感與數學思考兩方面確認數學教育的方向，最後再綜合歸納出高中生需要具備的數學素養。

壹、數學美感

數學不僅擁有真，而且擁有非凡的美，
一種像雕塑那樣冷峻的嚴厲的美，
一種不為我們軟弱的天性所動的美，
一種不具有繪畫和音樂那樣富麗堂皇的裝飾的美，
然而又是極其純淨的美，
是唯有最偉大的藝術才具有的嚴格的完美。

伯特蘭. 羅素（Russell, Bertrand Arthur William）

關於數學的美感，本段落從兩大方向探討，一種是數學家們對數學的要求，是真、純淨、嚴謹的；另一方面，在藝術家的角度下，以充滿想像的空間，自由達到與數學相同的「真與純淨」。

一、數學家談數學之美

譚建國將數學之美歸納出四個方向：發現隱含的真理、發現普遍的真理、發現和諧、簡單（譚建國，1996：56）。很多的關係並不顯而易見，需要經過時間的探究才會展現在人類面前，好比微分與積分的互逆，揭示了兩者的內在本質，是隱含的真實存在；圓周長與直徑的比例關係則是一種普遍被發現的美麗關係，是一個美麗的數字（譚建國，1996：56）；和諧的關係中，也有著統一性與對稱

性，存在著秩序感，並能為理智所理解，好比巴斯卡三角形[21]，能簡單看出對稱性，又能從中推演出多種關係的存在，而牛頓甚至將它無限擴張[22]，帶進更深的領域；從複雜的現象整理出簡單的法則，好比從地球觀察各種星體的運轉，自古希臘時期就有很多學者提出各種星體運行的理論，最後只要以「橢圓」的運行軌跡，就可以解釋所有當時他們觀測到的現象。

保羅·拉克哈特（Paul Lockhart）提到：「數學是一門藝術，沒有什麼像數學那樣夢幻及詩意，那樣基進、具破壞力和帶有奇幻色彩」（高翠霜譯，2013：38）。為了一個數學定理的證明，人類可以花費無數的時間與精神去研究，當一個定理被證明出來還不夠，還要嘗試找到更簡潔、更純淨的方式，每一個人都可以有他自己的特殊思路、有自己的靈感來源以獲取解決問題的想法，光一個畢氏定理的證明，在路米司（Elisha Scott Loomis 1852-1940）所著的《畢氏定理》中就收集了 370 種，每一種證明都是作者與那段探索過程獨有的關係。如果我們「有幸」想出自己的證明方式，那怕最後發現早已有人證明過，也是自己獨有的經驗，是一場與純淨數學的美好相遇。數學是帶有破壞力的，當畢氏學派發現無理數時，或許是先有害怕、有疑惑，卻也因此讓數學有了一個大躍進。在後面的歷史中也不斷地可以看見這樣的軌跡，羅巴切夫斯基與黎曼的非歐幾何，讓幾何的世界跳脫出歐氏幾何的範疇；格奧爾格·康托爾（Georg Cantor 1845-1918）的集合論，暗示了「無限的無窮」，都是一場場讓人類對整個數學觀大躍進的歷程。

戈弗雷·哈羅德·哈代（Godfrey Harold Hardy 1877-1947）對數學的描述：「一位數學家，就像一位畫家或詩人，是模式（pattern）的創造者。如果他的模式以畫家或詩人的模式能存留的更久，那是因為這些模式是用理念（ideas）創造出來的」（高翠霜譯，2013：38）。一首詩、一幅畫、一首曲子，任何一件作品被創作出來，需要創作者本身的熱情投入，長時間參與其中，想像如何呈現作品，自由的為作品添加它所需要的材料，創作出吸引人駐足賞析、具有美感的作品。相較於有形的作品，每一個現象關係中的抽象定律被發現同樣需要這些特質，人類

---

[21] 巴斯卡三角形：

1	C_0^0
1 1	C_0^1 C_1^1
1 2 1	C_0^2 C_1^2 C_2^2
1 3 3 1	C_0^3 C_1^3 C_2^3 C_3^3
1 4 6 4 1	C_0^4 C_1^4 C_2^4 C_3^4 C_4^4

[22] 牛頓擴展巴斯卡三角形：

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰
1	-2	3	-4	5	⋯
1	-1	1	-1	1	⋯
1	0	0	0	0	⋯
1	1	0	0	0	⋯
1	2	1	0	0	⋯
1	3	3	1	0	⋯
1	4	6	4	1	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

在有震撼人心的新發現之前，數學總是已經提出各式各樣的假說，想像出一個天馬行空、可能充滿不合邏輯、令人疑惑的世界；再一步步地尋找靈感，開放每一個進入腦中的念頭，驗證所有的關係、比較所有的特性，得出一個可供世人檢視的嚴謹論證。數學特別吸引人之處在於，這樣還不夠，這些關係是可以累進的，同一個關係可以讓後人不斷的添加其豐富度，只要過程不背離邏輯演繹，我們能用數學的語言創造出更簡潔的美，修正出最純淨的美。數學要的不僅僅是嚴謹的邏輯證明；它更渴望以最簡潔、最純淨的美來表達。拉克哈特在探討數學的美學原則時也提到：「簡單就是美（simple is beautiful）」（高翠霜譯，2013：39）。

拉克哈特提到：「數學是原始的創造力和美學的感受力（高翠霜譯，2013：45）；不是遵循指示，而是要創造出新的方向（高翠霜譯，2013：46）」。在思考一個問題，而想以數學的方式解決時，總會充滿著許多的想像，想像的方向與內容不一定是現實存在的，而是為了解決一個問題，單純想知道用這樣的一個方式會得到什麼樣的結果，就好比在玩遊戲的過程中，會不斷地用想像力來娛樂自己。而最後可能得到連自己都意想不到的結局。就如同虛數[23]的概念，創造出這樣的一個概念，是不存在於現實之中，但它的出現卻幫助高斯完成了代數基本定理[24]，棣美弗（Abraham De Moivre 1667-1754）也因著這一個基礎概念，發現了棣美弗定理[25]。這些看似無用的概念，一開始不一定是要拿來解決問題，也不一定想要創造出更多有用的概念，就只是因為它本身的有趣，它那極富魅力的本質引領我們思考著，試圖進入它的世界，讓我們瘋狂而著迷的與它一起共舞。

艾利·毛爾（Eli Maor）提到：「若說投影幾何從美學方面大大豐富了數學的內涵，非歐幾何的創立，則帶給整個科學思想與哲學思維無與倫比的衝擊」（曹亮吉譯，2014：148）。關於「無限」這個美好的存在，困擾著人類數千年，只要人類面對宇宙窮蒼，就一定會被它所吸引，而要解開這一個謎需要人類更多的想像力，需要更開放的心胸、更有彈性的思維、更有創造力的巧思、更嚴謹周密的邏輯驗證，這是人類再一次遇上不平凡的美妙關係。笛沙格提出無限遠點的觀念，並在所有研究對象中，試著找出整體圖像，引領我們用新的方式詮釋幾何世界的美，將幾何的世界引領進入另一種境地，多了自由想像，有另一種寬廣的思維空間，他以圖形特有之美，重新詮釋幾何概念，讓幾何進入另一種更高維度的層次，給予更寬廣的知覺，更自由的想像。讓數學之美具有普遍的合理性、和諧性與一致性。

莫里斯·克萊恩（Morris Kline）提到：「數學曾被視為是精確推理的巔峰，數

[23] 虛數：當$x^2 = -1$，定義$x = \pm\sqrt{-1}$，以 i 來表示$\sqrt{-1}$。
[24]代數基本定理：一元 n 次方程式必定有 n 個答案。
[25] 棣美弗定理：$(cosx + isinx)^n = cos(nx) + isin(nx)$

學不但本身即為真理，而且也是大自然設計的真理，人類如何了解這些價值是錯的，現在的理解又是什麼」（趙學信譯，2004：作者序 1）。數學的有效性（effectiveness）及正確性（correctness）讓數學獲得無比尊崇的地位，但隨著歷史的演進，更多新穎的觀念被引入（例如：非歐幾何），享受思考樂趣的人們能清楚知識的力量，也能認清理性思維的限制，在善用理性思維的同時也避免盲目信賴理性，雖然讓數學出現了不確定性，也有多種相互衝突的理論被提出來，但數學卻依然不可思議的有效。（趙學信譯，2004：7）

綜上所述，可以看出數學中的美感是將每一個觀念透過嚴謹的邏輯演繹統整出更一般性的概念，掌握住隱含在其中統一的模式，並以最簡潔的方式表達其中所要傳達的概念，有不被任何因素所能改變的確定性。在與數學相遇的過程中，可以是自由的，充滿想像的空間，是享受過數學美感之人都會想要遨遊的純淨之地。

二、藝術中的數學之美

美術與音樂都具有極高的藝術性，創作者憑著他們的感受、想像，自由地發揮出他們想要表達的內心世界，在視覺上，一幅美麗的圖畫是賞心悅目的。莫里茲·柯尼利斯·艾雪（Maurits Cornelis Escher 1898-1972）不是數學家，從小的數學也並不是很好，但從他的作品中可以看到他充分掌握住多種數學理論，圖 4-2 可以看出作品的對稱性，從每一個特定的局部往外拓展，也出現極高的相似性，更特別的是，從中心往外擴展，似乎可以無窮無境的畫下去，在周圍處抵達了無限的境地，數學家只能在腦中掌握的無限遠概念，透過艾雪的作品具體的呈現在眼前，畫出極具美感的精彩作品。在無限遠的地方會出現什麼的變化，是一幅什麼樣的圖像，艾雪透過它的畫，給了我們一種可能性的答案。而圖 4-3 中，艾雪創造出一個違反常理悖論式的怪圈，流動中水令觀賞者產生幻覺似的由下往上流，



圖 4- 2 艾雪作品

資料來源：https://www.wikiart.org/zh/mo-li-zi-ke-ni-li-si-ai-xue

再以瀑布的形式落到低處，透過一次又一次的轉折成功地創造出一個迴路，是一幅類似莫比烏斯環的形式，讓景象可以無限循環的流動下去。（郭維德等譯，1996：15）

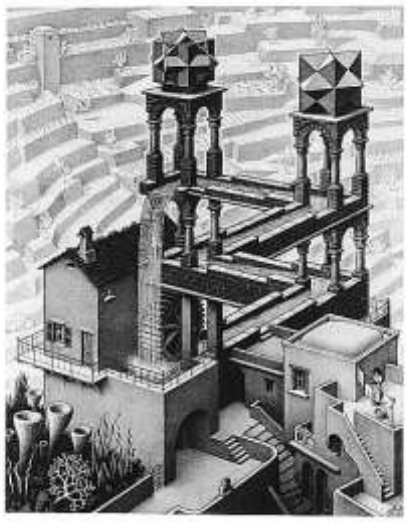


圖 4- 3 艾雪作品

資料來源：https://www.ss.net.tw/paint-167_198-9316.html

音樂中的音階，其實就是數學的規律，畢氏學派利用單弦琴找出了八度音程（2：1）、五度音程（3：2）及四度音程（4：3），可以說是比例關係中最簡單的幾組整數比。為了轉調無礙，在 1691 年由德國風琴師 Werckmeister 引出了十二平均律[26]，雖然它有音不純而且和弦不夠完美的缺點，卻也完美的解決了純律中轉調的問題（蔡聰明，1994：3, 12）。這是數學與樂理的完美結合，而在樂曲上與數學最美的相遇非約翰·塞巴斯蒂安·巴哈（Johann Sebastian Bach 1685-1750）莫屬了，在他獻給國王的樂曲《音樂的奉獻》（The Musical Offering）中，以圖 4-4

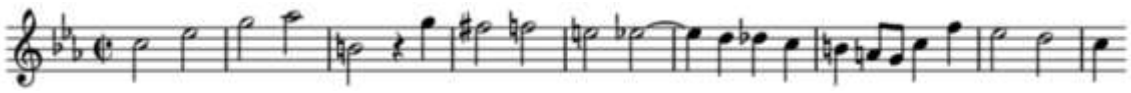


圖 4- 4 國王的主題

資料來源：郭維德等譯（1996：8）

為基本主題。巴哈由簡入繁的將樂曲豐富的呈現出來，先運用平移的方式，在音程及速度將上述主題做變化彼此交融；接下來是對稱[27]，以一個音階為對稱線做高低音階的對稱，再疊上一個主題的變化版；旋轉[28]也是利用同一個主題，在前面演奏的同時也開始從後方演奏。這是巴哈特別的運用（郭維德等譯，1996：12），這種「迴文」式的運用也常在文字中展現，如中文句子「天上龍捲風捲龍上天」、英文句子「A man, a plan, a canal, Panama」（郭維德等譯，1996：前言

[26] 十二平均律：將 1：2 的八度音程再依1: $\sqrt[12]{2}$的關係平均分成 12 等分。

[27] 對稱：在音樂的術語上，稱為「轉位」。

[28] 旋轉：在音樂的術語上，俗稱為「螃蟹卡農」或「逆行卡農」。

5）；而數學中類似的關係如「$11^2 = 121$、$111^2 = 12321$、$1111^2 = 1234321$…」或二項式定理的係數關係[29]。巴哈還會在演奏似乎要結束時做轉調的變化，很巧妙的與開頭的部分連接起來，在連續的變調之後，將調性一次次的提高，並在六次的變調之後再次回到最原始的起點（郭維德等譯，1996：14），是一首類似莫比烏斯環的形式，讓曲子可以無限循環的演奏下去。

艾雪的繪畫是空間、視覺的數學；巴哈的音樂是與時間、聽覺的數學。他們倆人的作品都運用了數學中的平移、對稱、旋轉、相似、循環，也觸及「無限」的相關知識，他們在各自的領域中，以自由的方式，發揮他們的想像力，將各種關係做巧妙的結合，更特別的是他們與數學家一樣，都在傳達一種相同的本質，是一種人類本就懂得欣賞，無須多加言語描述就能獲得的純淨美感經驗。與數學需要高度理性支撐或許不同，但那股純淨的本質之美是不變的。

貳、數學思考

Bloom（1956）對思考提出六個分類，再由 Aderson 等人（2001）修訂為記憶（Remember）、瞭解（Understand）、應用（Apply）、分析（Analyze）、評鑑（Evaluate）、創造（Create），其中前三項為低層次思考，後三項為高層次思考（李坤崇，2004：98, 99）。其中高層次思考因為多種可能性及自身的判斷，至少需要包含三個面向：批判思考、創造思考及問題解決，三者都須具備足夠的知識、意向與技巧，並能對問題脈絡進行客觀的標準評鑑，做有效的澄清與評估，而創意思考能從其中產生新的及原創的觀點，問題解決則是涉及這一連串的技巧進行綜合運用，以求解決問題的整個過程（葉玉珠，2002：78）。為了解決各種現實遇見的問題，需要培養高中生具足高層次的思考的能力，透過數學的訓練培養學生擁有相關的能力。

波利亞對怎樣解題提出四個步驟：「了解問題、擬訂計畫、執行計畫、驗算與回顧」（蔡坤憲譯，2006：18, 19），首先要對問題有充分的理解，確保考慮到所有的面向，接下來一步步的引出與過往相關概念的連結，擬訂計畫並執行，可能在過程中發現方向錯誤，無法執行必須重新來過；也可能誤以為成功解決，在驗算後必須重新制定計畫，直到四個步驟皆確定完整無誤。並提到數學有兩個面向，其一如同嚴謹的歐氏幾何學，是一種有系統的邏輯演繹；另一個是透過啟發，像發現新概念般的歸納科學（蔡坤憲譯，2006：15），在解決問題的四個步驟中，需要讓學生自行體會箇中滋味，學生才能透過自己的思考充分掌握住新概念，而這種啟發式的發現過程，會帶著學生感受到真正的數學本質。

劉柏宏提到：「學生的數學思考觀點是對於數學內涵的一種微觀概念」，學

[29] 二項式定理：$(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y^1 + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^n x^0 y^n$

生從遇見一個數學問題開始，過程中的理解、分析、擬定策略，解決問題，甚至回顧整個過程，與數學家解決問題時的心理狀態都能算是數學思考（劉柏宏，2007：704）。在教育現場，老師們常常迫於考試的壓力，只能將各種關係、概念快速的教給學生，以便學生能夠應付考試，造成學生對數學本質的錯誤解讀，以為記憶和背誦是最有效的學習方式，也就大大影響了學生們的學習成效（劉柏宏，2007：704）。數學家嘗試解決問題時的背後智慧，是學習數學思考的重要借鏡，數學思考的過程包含推測、歸納、演繹、類比、特殊化、與一般化等複雜組合，邏輯演繹可說是當今數學教育的主流，嘗試將數學知識以最簡潔、精準的方式傳授給學生，忽略了數學家在思考過程中遇見的掙扎、挫折和試誤過程的冒險。數學概念在形成的初期往往是憑直覺大膽猜測，並做啟發式的思考，而不是單靠邏輯推理，同時也受到當時的文化背景及數學家們的信念所影響，才會有畢達哥拉斯學派拒絕承認無理數、笛卡爾拒絕負數為方程式的根，這些看似違反邏輯演繹情況的真實存在，也是數學思考時一定會經歷的過程（劉柏宏，2007：705）。讓學生從自由感知到自由思考，最後形成具有嚴謹的邏輯證明，是一種符合數學概念演進的歷程，也是一個人在數學思考的過程中最真實的體驗。

孔子說：「學而不思則罔；思而不學則殆」，若只學習而不懂得思考會迷惘受騙；只思考而不學習則會產生疑惑，學習與思考必須兩者同時並進，數學思考是一種帶著過往學會的概念，對現在面臨的問題進行思考的過程，只有自己參與思考的過程，才能真正學會一個概念。記得曾有學生提起，如何練習思考？猶記得當時我們的結論是「帶著問題意識，給自己空白時間與之相處」就是一種數學思考，剩下的就是能有多大的熱情與這個問題意識相處多久了，當然，這樣的思考模式也可以擴展到所有的領域。

數學中每一種關係的產生都不是偶然的，都是人類從問題意識開始，經過一長串為了解決問題而引發探索的過程。老師在引導學生理解概念的過程，就像一個新聞記者，需要詳盡地挖出歷史真相，如實的報導整個事件的經過，讓學生了解當時的時代背景，為何人類會花時間思考這個問題，再給學生時間與空間嘗試與問題在一起，自由提出可能解決問題的方向，一開始要的不是邏輯性的解決，而是與自身過往經驗產生連結，給出任何可能的解方，然後沉思、想像可能的關係，才會慢慢地進入小心求證的過程，整個過程都與原初的「問題」在一起，最後才會得到結論，並且反覆驗證所得的結果是否正確無誤，直到一個概念可以牢牢地建立在內心深處。

愛因斯坦（Albert Einstein）曾說過：「想像力比知識更重要（Imagination is more important than knowledge）」。從數學的角度來看，當一顆綠豆只要磨得夠細，所磨出來的粉可以鋪滿整個地球表面，不需要考慮能力的問題，而是想像事

物最本質、最純粹的意涵。這是數學世界裡常用的一種方法，剛開始的時候，借用生活中會出現的特例來思考，然後將這個特例拓展出去，善用想像來面對實現世界無法做到的事，卻可以在心靈深處持續執行，最終得出可能的方法，甚至可以無限的操作下去，讓整個思維藉由想像無邊無際的推演下去。克卜勒（Kepler）曾對他的天體橢圓運行理論說到：「我從靈魂的最深處確信其為真，而且我以難言和強烈的愉悅來思索它的美麗」。豐沛的想像力觸發他構思出新的理論系統，當然，他在創建新理論時，還是從觀測的資料數據以邏輯演繹的方式往下推理。（趙學信譯，2004：43）

只要我們打開敏銳的感官搭配思考就會發現，數學無時無刻都在我們身邊，等著我們去跟它做朋友，當我們以開放的心去接觸它，會產生一種內在獨特的感受，當我們讓自己更開放、更自由，就會對每一個發生產生好奇、得到驚奇，哪怕一開始先有疑惑，也會以歡喜的心接待這一份疑惑感，甚至是帶著崇敬的心來面對這一份疑惑。這種原初的感受，源自於數學對所有存在的共通性，不論在每一個人、每一個族群、每一個文化都可以得到相同的一致性，我們也相信著這一份最終的結果是每一個人都可以到達的境地，只要一個人帶著欣賞的心境，好奇的探索，過程中嘗試理解，當然會遇到挫折，痛苦的失眠好幾個晚上，心力交瘁的揉掉好幾疊紙張，懷疑自己幹嘛要進入這個令人痛苦的境地…，卻又總是嘗試創造有形的物體來理解抽象的概念，只要產生了一絲絲的想法就興奮不已，對偶然出現的靈光欣喜萬分，在想像的過程中讚嘆宇宙萬物的精巧定律，對法則定律背後的神奇一致性產生崇敬。不斷重複痛苦、欣喜；挫折、振奮；懷疑、篤定…種種正向與負向的情緒，卻也因此讓我們在理解的過程中更加清晰，讓我們在想像的世界中更能搭起對抽象與現實間的連結，而這一切都是在思考之後才有機會獲得的，唯有透過思考才能產生的真實經驗。

叁、數學素養

在數學素養的認知上，本文從三個方面進行分類探索，首先是政策中對數學素養的明確定義，其次是從華德福的教育觀點看待數學素養，最後綜合整理出一個高中生所應該具備的數學素養。

一、政策觀點

國內討論一般教育的素養及特定教育領域的數學素養，最主要的參照為洪裕宏教授 2008 年完成的「界定與選擇國民核心素養研究」，將「competency」譯為素養；及李國偉教授等人於 2013 年完成的「數學素養研究」，將「Mathematical literacy」譯為數學素養，而兩份文件探討的源頭都是經濟合作與發展組織（OECD： The Organization for Economic Cooperation and Development）（單維彰，2016：2），而該組織所主導的國際學生能力評量計畫（PISA：Program for

International Student Assessment）中，在 2021 年對數學素養的定義有如下說明：「數學素養（Mathematical literacy）是個人進行數學推理時，透過形成（formulate）、應用（employ）和詮釋（interpret）數學的能力，以解決各種現實世界環境中問題。包含運用數學概念、程序、事實和工具來描述、解釋和預測現象。它輔助（assist）個人瞭解數學在世界上扮演的角色，並做出有根據的判斷和決定，這是成為有建設性、參與性和反思性的 21 世紀公民所需的」（OECD, 2021: 7）。從這樣的脈絡來看，在國中以前的數學素養是基本的養成，以「literacy」翻譯之比較貼近，而高中之後的數學素養，必須培養出更高層次的數學能力，以「competency」翻譯比較洽當。

蔡清田提到：「素養」是一種理念，是指個體能具備知識（knowledge）、能力（ability）與態度（attitude），協助適應生活及立足社會的基本所需，協助個體在社會參與、公民責任、國家發展和終身學習都能發揮功效（蔡清田，2011：4）。李國偉等人為計畫主持人的教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫中，明確提出數學素養的核心內涵應指：「個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。」（李國偉等四人，2013：5）

十二年國民基本教育課程綱要的總綱中提到：「核心素養」是指一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。強調學習不宜以學科知識及技能為限，而應關注學習與生活的結合， 透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展，並在數學課程領綱中給出六個具體目標（見表 1-1）（教育部，2014：3）。

二、華德福觀點

華德福教育視 12 年級的高中畢業生為皇冠上的珍珠，引領其走在追求真實、真理和自由的道路上，向世界使用自己的判斷，找出屬於自己的答案（鄧麗君；廖玉儀譯，207：13）。全球第一所華德福學校（Waldorf School）由魯道夫·史代納博士（Dr. Rudolf Steiner）創立於 1919 年，以「人智學（Anthroposophy）」為教育哲學基礎，當時史代納給第一批華德福教師三個系列講座，也都集結成冊。因為華德福教育並未針對數學素養一詞有說明，所以研究者嘗試從相關書籍中梳理出跟素養有關的論點，並確認數學在其中扮演的角色。

史代納認為人與自然有許多相同之處，一個人在思考上展現了植物與植物生長相同的樣貌，植物接收來自光的力量，使它向上挺立，同時植物具有自我發展

的能力，適應環境長出自我的特質，史代納提到：「人這個感知物件被給予了一種自我改造的可能性，就像在植物種子中也存在成為完整植物的可能性」（王俊譯，2017：174）、「我們中的每一個人都在被召喚成為自由之靈， 正如每一棵玫瑰種子都在被召喚成為玫瑰」（王俊譯，2017：184），人需要實際去感受來自太陽、月亮、宇宙萬物的力量，重視與大自然律動的關係，藉此拓展視野，形成自我的人格特質。

當人在思考時具有三個要素：連結（Schullogik）、判斷（Urteil）、概念（Begriff）。當個體觀察一件事物時，就已經透過腦中意識到過往留下的結論做出相對應的連結，依循著彼此間的關係進行判斷，最後得出一個概念。每一個過往的結論都會鮮活地留在人的內心裡，以一種完全情醒的意識狀態覺知結論的存在，運用帶著半意識的情感，以做夢的心下判斷，將判斷變成一種心裡的內在習慣，最後形成概念，讓概念活在無意識的狀態之中。而這新概念成為另一個暫時性的結論，經過另一個事件的發生，再次進行判斷，成為生命中另一個新概念。如果教育工作者一開始就對孩子注入一個僵死的新概念，將會只是一個概念軀殼（Begriffsleichname），無法活在孩子的內心深處，只有在教學的過程中進行特徵描述（charakterisieren），盡可能地給出多個視角，那麼新概念將會與孩子一同成長（芮虎；李澤武；廖玉儀譯，2014：201-213）。對於高中生而言，「善、美」不再是最重要的原則，他們開始追求「真」，此時的重點是良知意識的培養，引領他們走在真實、真理和自由的追求道路上，向世界使用自己的判斷，找出屬於自己的答案（鄧麗君；廖玉儀譯，207：13）。

華德福教育兼顧意志（Willing）、情感（Feeling）、思考（Thinking），照顧人的身、心、靈使之認識自己及世界，成為一個真正自由的成熟個體。在兒童直到換牙前是生命的第一個階段，此時世界是善的（die Welt ist moralisch）；從換牙到性成熟是第二階段，世界是美的（die Welt ist Schön）；性成熟之後進入第三階段，世界是真的（die Welt ist）（芮虎；李澤武；廖玉儀譯，2014：217）。而什麼是真，就看每個個體如何認定了，史代納認為不管哪一種表象所要帶來的真，都可由不同個體，用不同的方式自　由的去認識，而最後大家都能達到同一個境地（王俊譯，2017：170）。以平行線為例，若學生一開始對無限遠有交點是疑惑的，覺得是錯誤的觀念，都是一種真實的感受，但最後還是可以一起到達平行線在無限遠有一個交點的觀點，重新開啟新視野。以人類長遠的歷史來看，當笛沙格提出無限遠點的時候，也並未被當時的人所接受，是在經過很長一段時間才逐漸被採納。不論哪一種表象所要帶來的「真」，都需要學生自己保有自由的狀態去追尋，是值得教育為學生準備的能力之一。

三、研究者觀點

研究者認為數學素養是「以自由感知為基礎，經驗世界存有的美，以自由想像擴展視野，進而自由思考般的深入探索，輔以邏輯推理小心求證，做出自由的判斷，找出世界之中的真與純淨」。目前一般政策上對數學素養的定義有三個重點：運用數學思考解決問題、理性推論進行預測判斷、有效溝通各方觀點。只是數學不僅僅是要能運用，也要感受到數學世界裡最純淨的美與真，單純欣賞數學本質性的美，尋找問題的答案時，能為自己做出自由的判斷。

保羅·拉克哈特提到現今的數學教育錯失了數學中最純淨的美好，數學可以擴展想像力，欣賞到關係背後的純淨，有著簡潔、對稱、一致等等的具象或抽象美感，數學是可以被當作一門藝術課程來教學，所有學校考試要考的，社會上認為數學需要教授，那些被認為有用的特點，都是數學的附加價值而已，會在學習的過程中自然而然就經驗到，好比貝多芬能創作出那麼多經典的廣告配樂，絕對不是他當初學習音樂的動機，那些創作出來的作品只是他學好音樂的副產品而已（高翠霜譯，2013：49）。音樂是跳動的數學；數學是寧靜的音樂，當我們在思考數學時，總是在連結各種概念的情況下尋找靈感，建立直覺，而碰到疑惑絕對是必經之過程，也就是這一份疑惑感讓我們想要與它搏鬥，為它廢寢忘食的挑燈夜戰，不知道思路會往哪個方向前進，不知道突破性的想法會在何時降臨，直到疑惑解開為止，此時心靈的狀態就像康德說的崇高，是被痛苦折磨得淋漓盡致，但最後的美麗卻是我們渴望一嚐再嚐的，值得我們一再地追求下一個疑惑。所以數學教育是不需要想辦法讓數學變得有趣，因為它早已遠遠超過我們所能想像的有趣（高翠霜譯，2013：52）。這裡提到的觀點，跟目前已被定義出的數學素養有著極大的差異，主要的重點不是放在培養出任何一種數學技能，而是希望能讓學生感受到數學世界裡最純淨的美。

研究者從小就很喜歡數學，還記得小時候思考的一個問題：「男主人、兩個男孩、女主人、兩個女孩、管家跟狗一家人想過河，但只有一艘船可以使用，另有三個條件限制，(1)船能坐兩個人（狗也算一個人的重量），(2)只有男主人、女主人及管家會划船，(3)男主人不在，女主人會打男孩；女主人不在，男主人會打女孩；管家不在，狗會咬人。請問這家人如何平安過河？」而這道問題也常常成為我新帶一個班時的開場白，通常學生會先用「創意式」的方法來過河解決問題，如：造一艘船、製作飛行器、犧牲狗…等等。這時可以談談何謂條件，如何在數學的邏輯範疇下進行思考可能性，漸漸的就會在各種嘗試後，得出第一個步驟一定是管家帶狗過去，接下來會在第四步驟略為卡關，但通常學生能在短時間內自己解決，關鍵的是第九步驟，也是最難想到的。在沒得出此想法前，有人會全部重來，有人會不斷檢查，都需要與這問題長時間相處，經歷各種可能性的思辨；想像各種可能性的應用，直到某一刻會突然靈光乍現，而得到這決定性的步驟，往後也就能順利的解決問題。如果不以放過解決問題而滿足，欣賞解題的每

一個步驟，會有另一層次的驚嘆。題目本身先以一種對稱性呈現，即男、女主人與男孩、女孩的對應，而解答也存在著美麗的對稱性，左側由上往下的過河順序及右側由下往上的過河順序依著題目男、女的對應關係完全一模一樣，中間以無對應關係的管家與狗做轉折，原來結構上的對稱性可以是如此美妙的存在，那來自「天啟」的關鍵步驟已經夠讓我們驚喜了，而這個對稱性讓我們更欣賞到數學獨有的美。

表 4- 2 對稱性美感

管家、狗➔	管家、狗➔	男主人🡐
管家🡐		男主人、女主人➔
管家、男孩➔		女主人🡐
管家、狗🡐		女主人、女孩➔
男主人、男孩➔		管家、狗🡐
男主人🡐		管家、女孩➔
男主人、女主人➔		管家🡐
女主人🡐		管家、狗➔

資料來源：研究者自行整理

研究者認為，培養數學素養要以感知為基礎，透過感官覺察周遭的一切，培養出美感的判斷力，過程中讓學生自由感知，體驗數學世界裡各種美的展現，善用作圖、計算、證明…等等的各種技巧與能力，開放感知、讓內在圖像流動，運用思考做嚴謹的邏輯推理，為自己做出自由的判斷。在嘗試解決問題的過程中，除了能運用理性的思辨進行各種分析之外，那怕遇到各種困境、挫折，還是保持主動積極的心，善用想像、創造驚奇，以自由感知、自由思考的狀態與真實、純淨的美感經驗取得連結。


國立東華大學
NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

第五章 投影幾何課程的設計與實施

本章分為四個小節，分別說明投影幾何的課程目的、課程內容、教學方法及學習評量。

第一節 課程目的

史代納曾提及：投影幾何對想像空間充滿巨大的挑戰，運用想像力以一種自我得以突破且極度自由的模式重新探索幾何，他預期投影幾何可以達到三件事：

1. 具有很大的治療前景。
2. 為青少年們帶來二元性的概念是相當重要的。
3. 當他們透過一些初步的基本思想，達到雙重性的原則，使他們感到困惑和驚訝，老師就已經實現了所有應該實現的。（Peter Baum etc, 2014: 49）

研究者任教的華德福學校，以人的發展圖像為前提進行課程設計，用 7 年發展論為架構，培養學生在各階段所需發展的能力。以數學課程為例，剛上高中時期的學生尚處於探索自我的階段，從認識外在的環境中反看自己在這個世界的定位，此時三角函數與指對數可以就理性層面帶給學生安定感，利用儀器精準測量地理位置與高程，有助於幫學生以更有方法、更有效率的方式做探尋，此時的教學，在某種程度上以能安定學生迷茫的心，比學會所有的概念來得更為重要。學生需要更真誠如實的看見自己內在狀態，確定自己想要追求的方向。當學生來到十一年級（高二）的階段，將注重心靈上的內在探索，找出自己思考時所依據的論點，有邏輯性的推理分析，建立整體圖像並關注細節，最後能清楚解釋自己提出的論點，在練習思考的過程中，要能突破過往的思考束縛，讓觀點更加開闊，能靈活運用。在數學課中，投影幾何課程將是重要的訓練之一，培養學生掌握無限的概念，透過對無限遠點、無限遠線及無限遠面的探尋，學生們的思維空間可以擴展得更加遼闊；並給出點、線的對偶性，打破舊有的概念，讓思考的層面更加擴大，自我檢視為何要接受這一種觀點，而不是另外一種觀點，甚至有更多其他可能性觀點的存在。同樣的，學會此單元所傳達的概念並不是最重要的，重要的是讓學生仔細檢視觀點形成背後的成因，自己是基於哪一種立基點，憑藉著自由想像與邏輯推理，對這個單元得出數於自己的結論。作為一個老師，必定有一個被視為正確的概念要傳達給學生，但並不是制式的教學，而是信任學生會透過自我內在的判斷，在最終的旅程上以自己的方式找到那一個共同的論點，為自己以自由的判斷總結出一個概念。

基於上述脈絡，對投影幾何課程訂出四個理念，並整理出對應的目的。分述如下：

壹、投影幾何課程的設計理念

一個學生進入大學之後，不論是技術或學科，都將以專精的學習為目標，而高中階段探索出自己想要的方向是非常重要的一環，在這個奠定未來方向重要的時期，首先著重在聽見自己內在的聲音，在高二時，用自己過往 16 年的經驗找到自己認識世界的方式，這個過程中是如何受到大人們的影響？畢竟過往的學習很大一部分是來自權威的教導，以幾何為例，都是在歐氏幾何的範疇下學習，是以接觸得到的有限空間來建構對整體世界的想像，是否只是受限於外在的因素而決定了自己的觀點？是否只是來自權威的學習、憑著之前的經驗而做出判斷？若不是自己內在的真實聲音，就不算是一種自由的判斷。培養學生運用想像力拓展出不同的可能性，為自己的判斷進行一次又一次嚴謹的檢視，從中確認自己所思所想是正確的，透過有邏輯的批判性思考，得出經得起考驗的結論。投影幾何為這樣的理念帶進更深更廣的視野，給出良好的訓練，在教學的過程中處處激發出與過往認知的不同感受，引領學生享受在驚奇與疑惑感之中，慢慢地靠自己的思考掌握他們遇見的概念，並以自己的力量獲得不同於過往數學所帶來的美感經驗。

綜上所述，以下分成聽見內在真實聲音、自由判斷、批判性思考、美感教育四部份加以說明。

一、聽見內在真實聲音

在華德福學校 11 年級會有一門「帕西法爾」的主課程，故事的主軸是主人翁回顧過去的經驗，想像未來情境，在自身目前面臨的情境中做「自由」的個人判斷，而能達成此目標的首要任務就是聽見自己內在的聲音，從自我的意識中，不斷的內省、進行深度思考，甚至透過冥想的方式進行思辨，從中感知自己的直覺並理解自己內在的真實聲音，持續保持學習與成長，提升對自己的認識，調整內在聲音建立與新經驗和洞見達到一致性的概念。華德福學校強調意志、情感、思考，此時的 11 年級正從思考中的情感過渡到思考中的思考。在投影幾何課程中，透過圖形變化的連續性，讓學生必須在經歷無限遠處做思辨，感受無限遠處存在的可能性，過往所學的歐氏幾何，平行線是永遠不會相交，但現在卻要面臨無限遠點的存在，這是第一個要面對的疑惑，並且還要依此掌握住無限遠線及無限遠面的關係，在這個過程中，不能放過任何一個自己曾經從心中產生的疑惑，真實的與這個疑惑共存，不論當下能否接受此一論點的說明，都要以真誠、開放的態度面對。

二、自由判斷

教育工作者有一個終極的概念要傳達給學生，是一種具有普遍性及必然性的觀點，但過程中，信任每一位學生可以由他自身的生命經驗與過往所學習到的知

識來獲得，透過本身的思辨為自己的觀察做出整理、歸納，以最自由的方式判斷而得到一致性的結論。這在目前以考試為導向的體制教育中並不容易做到，現今體制的教學過程中，以權威的方式強制給予各種知識，並要求學生理解，忽略學生學習過程中的生命感受，缺少讓學生以自我的想法，在內心深處做出判斷、進行辨證。雖然公平客觀的紙筆測驗形式有相當的重要性，但評量不一定只能有單一的紙筆測驗，也不是只能有一種制式性的標準，給出學生判斷過程的空間，信任學生會從中得出屬於自己的觀點，卻又不會失去對概念的掌握，是需要在這階段給出多種看待世界的觀點，投影幾何以無限遠點、線、面的存在及對偶性兩大觀點，挑戰學生與過往思維的不同思考模式，將傳統「點域」的平面轉換成以「線域」定義的平面思考，帶進更多元的思維方式，透過理性思考的邏輯辨證，體認到定理及圖形間的驚奇感，在對觀點的陳述過程中，與過往所學產生內在衝突的嚴謹辨證，從疑惑中得出屬於自己的自由判斷，是課程想要培養學生的一種關鍵能力。

三、批判性思考

學生在學習的過程中，不僅僅是接受、記憶及理解各種知識，更要兼具深度與廣度，以邏輯推理的方式全面思考其中的各種關係。培養學生質疑的習慣，以深入了解問題的每個面向，確保沒有遺漏任何重要的細節，檢查所依賴的假設是否成立，以確保基於正確的前提進行思考和分析。透過廣泛的閱讀，同儕間的分組討論，分享彼此的想法，清晰陳述並書寫出自己的觀點，聆聽他人的想法與觀點，學會從不同的角度看待問題，想像不同觀點的合理性，除了理解、應用及分析各種概念外，存有超越它們的企圖心，對自己的思考過程進行反思，認識到自己可能存在的偏見或局限性，同時比較不同觀點的差異性，進行深入的研究，以便做出全面的系統性評估。訓練批判性思考是一個漸進的過程，需要時間努力和不間斷的實踐。藉由分析找出各種影響的細微之處，藉由邏輯推理能力確認前因後果的連結，每一種結果的產生是經由哪些不同原因所造成的，鍛鍊從具象到抽象的思考能力。傳統對空間的理解上，總是分為三個維度：上下、左右和前後，每一個真實存在的物體只能在空間中出現在我們眼前，由外部產生各種現象，再由人類賦予它形式上的意義；而投影幾何將經驗感知與數學理論聯繫在一起，將藝術家透視技法的消失點與平行線在無限遠相交的觀點融合在一起（Peter Baum etc, 2014: 51, 52），透過清晰的定義、嚴謹的邏輯演繹，打破框架，以新的觀點重新檢視傳統的幾何學，帶出另一種全新的風貌。

四、美感教育

美感教育能培養對細節的敏感度，深入地感知各種元素的存在，理解這些元素如何共同創造出美的效果，理解不同的情感和思想，學會用藝術性的方式來表

達自己的想法和情感。有助於聽見內在的聲音、開啟自由的判斷、培養批判性思考的能力。在解決問題的過程中能多元觀察、深入了解、客觀閱讀、尋找靈感，勇於嘗試創新，學習批判性思考尋找方法得出答案。美感教育不僅僅局限於藝術領域，它可以與數學、哲學、體育…等各種領域相結合。投影幾何藉由一張張點線關係的手繪圖，從作圖過程就不斷帶給學生們一次次的驚奇感受，再藉由清晰的思考得到異於過往概念的奇妙經驗，享受從不同視角看待幾何的全新感受，不僅僅欣賞到圖形的具象美感，也體會到抽象思考過程中真實存在的美感意涵。

貳、投影幾何的課程目的

語言的形式不是只有說話時的聲音傳遞，或是閱讀與書寫的文字，自然界中以「圖形」呈現要對人類訴說的現象與真理，而如同聲音有大、有小；有噪音或樂音，文句亦有長短或優美與否，自然界的「圖形」語言在傳遞觀念的同時亦傳遞著美感。而數學中，「幾何」正是以精鍊的點與線所形塑出來的圖形，化簡馭繁地轉述自然界的奧秘，投影幾何用很多的點、很多的線去探索無限的概念，也是人類不斷挑戰自我意識過程中的重要發展。

投影幾何必須在一定的規則下作圖，運用最基本的工具：直尺（極少數時間用到圓規）手繪作圖，要求盡力縮小誤差、強調精準度，完成圖形的過程中，進行步驟中的推理，學生能感受到工具使用時的精準度是刺激想像寬廣度的關鍵，而且畫出來的圖是有溫度的，在那個溫度裡孵化出下一次的想像，並再次推理，最後把整個圖形連續起來，這是電腦軟體所無法給予學生的內在經驗，雖然電腦軟體所畫出來圖比較精準，但少了過程的探索，圖形本生也比較沒有生命力、沒有溫度。當學生靜心專注工作後，自然而然進入與美的相遇，會油然生出驚訝與讚嘆的瞬間。投影幾何也重視邏輯推理，但推理的立基點是什麼？必須帶著學生自幾何發展史的脈絡中尋找並理解，在他們已經接受歐氏幾何平行線並無交點十幾年後，突然要給出無限遠點的概念，這對學生的衝擊非常巨大，過程中他們會感到困惑與驚訝，引導學生自發性地想要探索更多會豐富他們內在的視野，藉由點、線的對偶關係幫助學生不落入對、錯的二元對立，相當值得在青少年心中注入如此有感的種子，然後啟動一連串的連鎖反應，以一股探索世界的欲求狀態，遷移至所有領域的學習，從心魂的內在感受，開放自由想像的空間，以理性邏輯推理的方式對世界做整體性的判斷，投影幾何課程具備如此美好的特質。

綜上所述，在經過六個班的教學，檢視學生的學習表現及學習態度，反思教學成效，過程中與校內老師及全台其他華德福教師聯合共備課程，修訂投影幾何課程有下列五大目的：

一 、運用直尺、圓規兩種基本的作圖工具，呈現幾何最基本的語言—點、線，盡己所能的依照規則繪製出精準的圖形。

從每一堂課的美感體驗，以及繪製帕普斯定理、帕普斯對偶定理、笛沙格定理、笛沙格對偶定理、巴斯卡定理、布萊安強定理、點線對偶的極性圖與曲線變換的圖形，讓學生在理解作圖步驟後，透過一次次的練習，培養出精準完成圖形的能力，從中能理解到精準作圖的重要性，是自己為了發現新奇關係而自我要求達到的能力。最主要的目標為：運用尺、規兩種工具，降低誤差畫出精準且具有美感的圖形。

二、覺察自身感受，理解無限概念，並能分析各種圖形在無限遠時的關係。

此目的有兩個目標：

1. 真實呈現對無限遠概念的感受，嘗試提出疑惑，打開心胸傾聽不同的觀點。（簡稱二-1，以下均同）

透過想像感受平面不斷擴大的過程，從心魂中經驗在無限遠時的可能景像；從繪製圖形的過程中，充分利用工具及符號，繪製出每一個圖形，進而引發出不同圖形下共同關係的連結；理解每個定理的內容，體會到圖形延伸至無限時會出現的新觀點論述，覺察自我產生的疑惑感，願意帶著這一份疑惑感持續參與思辨的過程，為自己提出問題、嘗試回答、聆聽他人的想法，將課程內容作消化吸收後內化成為自己的概念。

2. 加進無限遠觀點後，推理出圖形本身的連續性與不同圖形之間的一致性。

能用自己的方式探索並分析圖形在無限遠處的關係，首先給出雙曲線轉變成在無限遠連接的概念，對照過往看待圖形的不同之處，讓不同圖形之間可以多出哪些關係的比較或出現哪些共同的一致性。

三、從點、線兩種視角的轉換，練習數學思考的歷程，由此看見並欣賞對偶性的存在。

此目的有兩個目標：

1. 思考推理對偶關係的存在，欣賞對偶性的美麗相應。

從不同的定理，感受點、線的對應，透過縝密的思辨，找出點、線兩者清晰的關係，清楚確認不同定理間的對偶性，除了能從圖形繪製之間看見對偶性，也在每一個定理作圖步驟的書寫過程中，讓文字書寫也能精準的對應兩者關係。

2. 透過無限遠點的概念，從對偶的極性圖中分析出圖形的連續性。

利用點、線的對偶性繪製出圖形相對應的極性圖。理解點、線對偶關係後，透過原始圖形的有限形狀產生極性圖的連續性，感受到無限遠點的真實存在，再一次體會到無限遠處的轉折變化，看見圖形對應關係，為新概念建立重要的觀點轉換，欣賞其中的美妙連結。

四、運用邏輯推理的方式，對幾何關係做出正確的判斷，進而掌握幾何概念的整體性。

此目的有兩個目標：

1. 用數學語言簡單扼要書寫作圖步驟；理解各單元間的邏輯順序，理性判斷、連結各種關係。

從不同的定理中，練習作圖步驟的書寫，從自由的書寫方式開始，慢慢給出數學語言的寫法，達到對偶關係能整齊對應，並且以簡明扼要的文字內容呈現。建立基本概念之後，在不同的立基點之下，以理性邏輯推理的方式來確認不同結論的正確性。利用尺、規數學工具繪圖，做初步的判讀，將每個單元主題組織起來，對彼此的相關性做出連結，看見各單元不是獨立存在，而是彼此具有高度的相關性。

2. 用數學語言清晰書寫出自己的思考歷程及內在觀點，充分掌握該單元的整體性。

經由邏輯推理思考驗證後，透過口語述說與符號書寫的方式記錄自我對各種觀點的理解過程，同時聆聽、欣賞其他人的想法，從多元觀點看見整體的脈絡，讓所有的概念達成整體性，抓住投影幾何課程最本質、最純粹的核心精神。

五、從投影幾何的實例中，練習自由想像的數學思考，產生驚奇的美感經驗。

此目的有兩個目標：

1. 邏輯推理想像圖像的變化過程，體驗屬於自己的驚奇感。

從對偶性的呈現到簡易作圖步驟繪製出的圖形，都能讓學生獲得到驚奇的美感經驗；對無法具象存在的客觀事實，能以冥想的方式想像存在的可能性，透過圖像的流動，圖形的連續性關係，有邏輯的判讀無限存在所帶來的衝擊，不斷對無限遠處的關係進行討論，同時讓自己在腦海中進行純思考的思辨，跟疑惑奮戰而得到會發出「啊！哈」的驚奇感。

2. 清楚新觀點帶來的情感自由；建立自由想像的思考空間，釐清立基點，運用新觀點作理性自由的判斷。

對每一個圖形的繪製、每一個定理關係的呈現、每一個概念的演進、每一個極性圖都能清楚的知道自己接受的程度，是屬於自己的情感自由，不受其他因素干擾。自由呈現每一種基本作圖的原始關係，挑戰與過往所學不同立基點下所產生的新觀點，自由的與過往經驗與知識做相關性的連結，經由不同的圖形關係得到驚奇的發現，創造出發現新觀點、掌握事物本質的一種純粹美感經驗，欣賞數學世界裡不同於其它領域在思考上的藝術美感，是自己理性自由的展現。

表 5- 1 投影幾何課程進度與五大目的對照表

週次	節次	單元目標	課程內容
一	1	一、二-1	探討單元一：投影三角形
	2	一、二-1、五	回顧時帶入單元二；完全三角形觀點 介紹單元三：帕普斯定理
	3	一、三-1、四-1、2	介紹單元四：帕普斯定理的對偶定理
	4	一、二-1、三-1、四-1、2	探討單元五：平行線交點 介紹單元六：笛沙格定理
	5	一、三-1、四-1、2	介紹笛沙格對偶定理 探討十點十線的整體性
二	6	一、二-1、三-1、四-1、2	介紹單元七：巴斯卡定理及布萊安強定理
	7	一、二-1、三-1、四-1、2	探討圓錐曲線中的巴斯卡定理及布萊安強定理
	8	三-1、四-1、2	介紹單元八：點、線相對於圓的對偶關係
	9	二-2、三-1、2、四-1、2、五	掌握點、線對偶相對於圓位置的關係
	10	一、二-2、三-2、四-1、2、五	單元九：以點的視角看原始圖，形塑出線的極性圖
三	11	一、二-2、三-2、四-1、2、五	單元十：以線的視角看原始圖，形塑出點的極性圖 1
	12	一、二-2、三-2、四-1、2、五	以線的視角看原始圖形，形塑出點的極性圖 2
	13	二-2、三-2、四-1、2、五	原有圖形的極性圖移動變化關係探討
	14	一、二、四-1、2、五	單元十：曲線變換作圖
	15	目的二至五綜合展現	利用 Geogebra 軟體，在 Mobius Net 中繪出所有定理的圖形；看見對偶點（線）的移動；曲線變換的整體性，對課程作總結。

資料來源：研究者自行整理

綜合五大目的，從康德對壯美的看法及精神自由，到史代納追求自由為其核心教育目標，再到 108 課綱中的數學領綱。一個高中畢業生是以追求讓自己心魂達到自由，對事情能做出屬於自己的自由判斷，創造過程中的美感經驗，這是目的五重要的理想圖像。而要達到這一個目的，需要有思考做為輔助，以想像力出發，透過理性思辨，以美的關係作為教材，目的一是其中的基礎能力，然後依目的二、三、四循序漸進且相互搭配來層層堆疊而得到。以這五點為目的，貼近 108 課綱的精神，同時讓學生能邁向自由。這五個目的並不是以每一堂課達成一個小目標來進行教學，而是以初探、熟悉、深化，不斷堆疊，再利用不同的內容，一次又一次體驗相同的概念，而讓學生自行內化在心魂之中，各個小目標與課程關係如表 5-1。

第二節 課程內容

為了落實並達成課程目的，將投影幾何課程內容分為十二個單元，除了前一節要符合的整體課程目的，每個單元也會有對應的小目標及每週目標，視班級學生的狀況進行教學，並不一定會全部教授。首先透過實際可見的圖形變化探討不同定義的可能性，再利用各種定理循序漸進的建立新觀念，進而開創出幾何的另一片新天地，可以更自由看待事情的角度，懂得追朔觀點的立基點來建立自己理論的基礎，最後留下待開發的世界供其自身探索，讓未來留下無限的可能性，期望達成投影幾何課程的五大目的。至於第十三單元為課後延伸內容，視情況鼓勵學生自我精進研讀。

單元一、二讓學生體會到舊有的定義是可以打破的，每一種定義有它想要傳遞的意義，而投影幾何想讓探討的現象有一致性，不會有例外的狀況發生。在這個前提下，以帕普斯、笛沙格及巴斯卡定理當中三線交於一點，推論出三線有平行出現時交點的位置。克卜勒螺旋槳輔助學生接受當直線平行時，可以將交點視為在無限遠處，讓舊有平行線沒有交點的概念得以有新的詮釋出現，能更自由地對事物進行判斷。搭配對偶定理，產生多元視角看待世界存在的現象，以此架構得出單元三至七。單元八、九轉換構成原始圖形的基本元素，利用點、線的對偶關係得出相對應的極形圖；藉由圖形的連續性，更進一步感受無限遠處的存在，也藉由通過無限遠得到極性圖的連續性，過程中培養學生作圖的耐心與精準度的練習、超出紙張外的邏輯推論、心魂深處的自由想像。單元一至九都在有圓錐曲線的前提下，透過固定的作圖步驟得到特殊關係或新的圖形，進入單元十曲線變換，則在只有點與線的關係下產生出橢圓、拋物線與雙曲線，單元十一將連續性擴展至圖形移動的過程中，不僅單一圖形可以探索因無限遠的存在而連續，所有的圖形變換也會因無限遠的關係，而讓圖形連續變換得出對應圓錐曲面與截平面的關係（表 5-2）。單元十二透過投影平面，將只能在腦中想像無限遠處的可能

情況具象的呈現在眼前，再一次體會到圓錐曲線的對應關係。單元九至十二培養學生感知心魂力量，保有自由想像，運用邏輯推理來看待這令人驚嘆的一致性，在內心深處留下對世界的崇敬感。單元十三為課後延伸，將初階的平面關係拓展至立體，試著翻轉空間的內外關係，再次轉換視角，及其在現實世界中的應用，留待有興趣的學生持續精進。

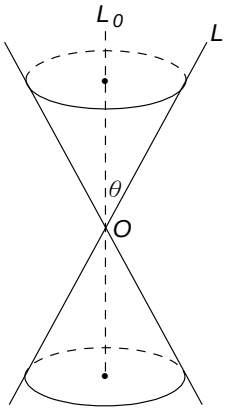
表 5- 2 不同觀點下圓錐曲線的關係

	圓錐曲面與截平面	圓對圓的極性圖	曲線變換與L_y關係	與無限遠線交點
橢圓	$\theta > \alpha$[30]	基礎圓的圓心在變換圓之內	L_y過 Q 與 L、L_x交點之間[31] L_y過$\overleftrightarrow{PQ}$、L_x交點與無限遠之間	0
拋物線	$\theta = \alpha$	基礎圓的圓心在變換圓之上	L_y在無限遠	1
雙曲線	$\theta < \alpha$	基礎圓的圓心在變換圓之外	L_y過 Q 與無限遠之間 L_y過 L、L_x交點與$\overleftrightarrow{PQ}$、L_x交點之間	2

資料來源：研究者自行整理

壹、投影三角形

三角形在教育部國語辭典修訂本中的定義為「三線段在平面上圍成的圖形，有三邊三角，故稱為三角形」。圖 5-1 中，淡紅色紙板有一個簍空的三角形，光源沿著 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ 分別投影出藍色、紫色、橘色、黃色及綠色的圖形，黃色圖形的其中兩邊平行，看似無法在遠處得到一個交點，而綠色圖形兩邊往外擴



[30] 如圖，θ 為 L 與L_o的夾角，α 為截平面與L_o的夾角

[31] 直線 L、L_x、L_y及兩點 P、Q 位置關係請參考圖 5-37

張，看起來更是無法在遠處得到一個交點。如果現在定義擁有三個邊的圖形即稱為「三邊形」，則黃色及綠色的圖形均可視之為三邊形，也就是不管光源放在何處，都可對淡紅色紙板簍空的三角形投影出一個「三邊形」。更特別的，如果直線是無限延伸，包含在其中兩邊的內部同樣是在此「三邊形」之內，綠色圖形的第三個頂點可以視為在另一側出現。

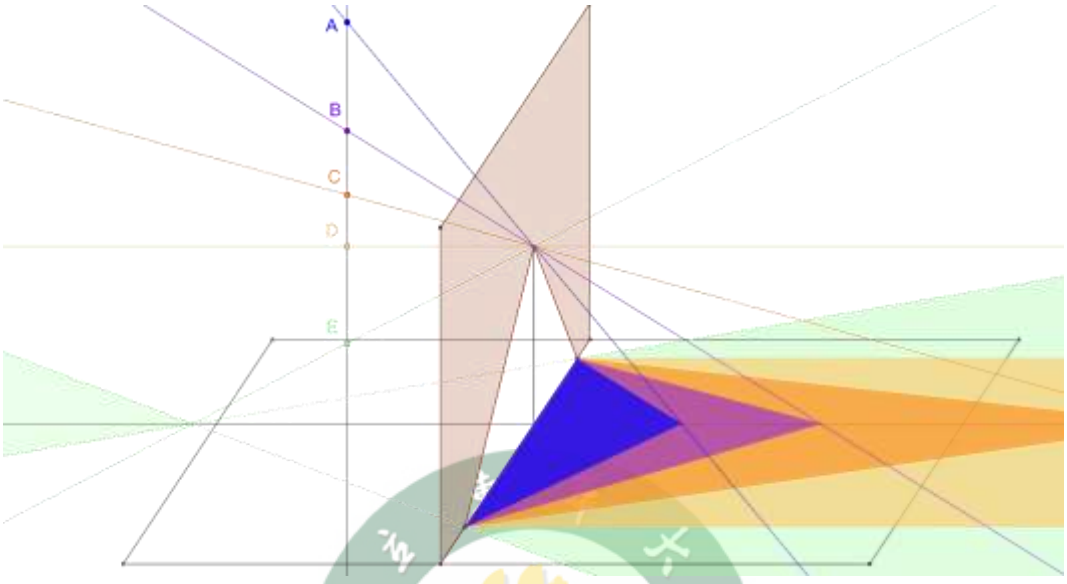


圖 5- 1 投影三角形

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 60, 62）繪製

在前三年的教學中並未加入此單元，當時學生在理解完全三角形的變化過程中，總是有學生無法進入狀況，無法接受黃色及綠色圖形為三邊形，當時就一直在思索，如何透過學生們自己的發現與討論來讓看事物的角度可以更開放，不會被現有的觀念所侷限住。當加進投影三角形之後，學生更自由、更容易的接受不同觀點的引進，雖然還存在著對過往學習的衝擊，存在著相當程度的疑惑，但內心卻是積極主動的想探尋以「沒有例外」的前提下，後續的課程內容會是什麼，是帶著好奇心持續學習的狀態。

貳、完全三角形

當三邊形被重新定義，圖 5-2 中，除了 3 及 9 的兩圖都只是一直線外，其餘的十個圖都有三條直線，其中也都包含了四個三邊形。

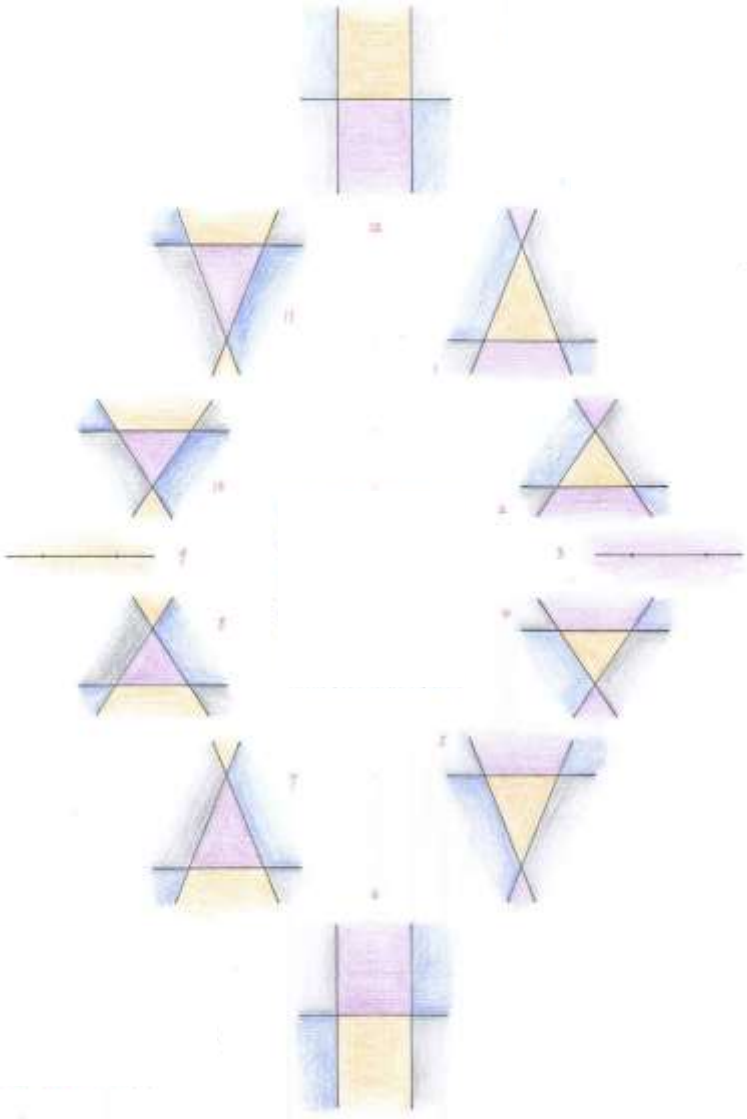


圖 5- 2 完全三角形

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 85, 86）繪製

在前兩年的教學時，都先引導學生有了無限遠點的概念後，再進行此圖形的繪製，所以將此單元放在教完所有定理之後，想藉此得到觀看三邊形的自由度，當時的學生單純只是接受有這樣的觀點存在，呈現一種就只有這樣而已的狀態，反而失去讓觀點更自由的目標。所以在第三年教學時，將此單元調整至課程剛開始並配合投影三角形，學生雖然直接受到觀點的衝擊，卻更願意接受挑戰，更能在沒有例外的前提下，嘗試重新詮釋三邊形的定義。

叁、帕普斯定理

探討約西元 300 年，數學家帕普斯（Pappus）提出的帕普斯定理：

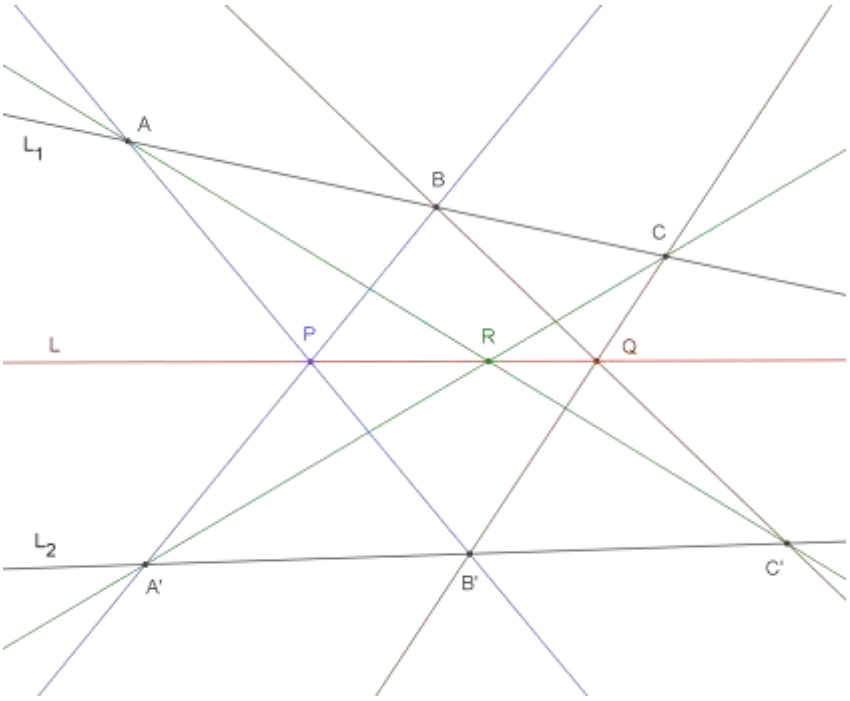


圖 5- 3 帕普斯定理 1

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 101）繪製

作圖步驟為

1. 任畫兩線L_1、L_2，位於線各取三點 A、B、C 及 A'、B'、C'
2. 依規則 AB'、$A'B$（兩點連藍色線）；BC'、$B'C$（兩點連棕色線）；CA'、$C'A$（兩點連綠色線），同色兩線交一點，得三點 P、Q、R

則 P、Q、R 三點共線（稱此線 L 為帕普斯線）

延伸討論交點及帕普斯線的特殊情況

1. 紙張僅出現兩種顏色的交點，是否能想像第三個交點的位置？
2. 無任何顏色的交點，若紙張夠大，是否能從圖形中判斷出所有交點的位置？
3. 當出現平行的狀況時，會出現哪些特別的情況？

當圖形出現定理「特殊」的情形，即藍色線平行時。首先換個方式看待帕普斯定理，因為兩點 Q、R 就能確定一條直線 L，代表 P 點會在帕普斯線 L 上，但圖 5-4 中，藍色線呈平行的狀態，此時的 P 點在哪裡呢？我們可以說：兩條藍色線的交點在無限遠處，而且也在帕普斯線上嗎？這個圖其實一點都不特殊，只是我們的紙張大小有限，無法看見全貌而已。

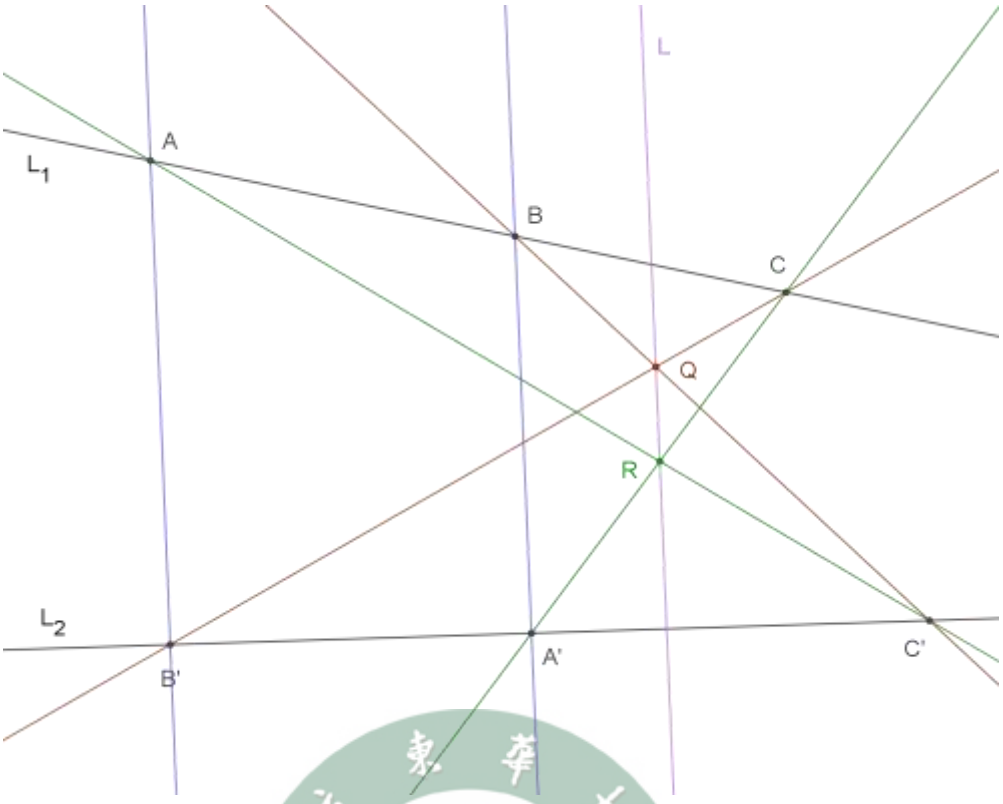


圖 5- 4 帕普斯定理 2

資料來源：研究者整理繪製

當藍色線成平行時，交點 P 在無限遠處，若同時棕色線也成平行，交點 Q 也在無限遠處，代表通過 P、Q 的帕普斯線也位於無限遠處，而 R 也在無限遠處，可以知道綠色線也成平行。

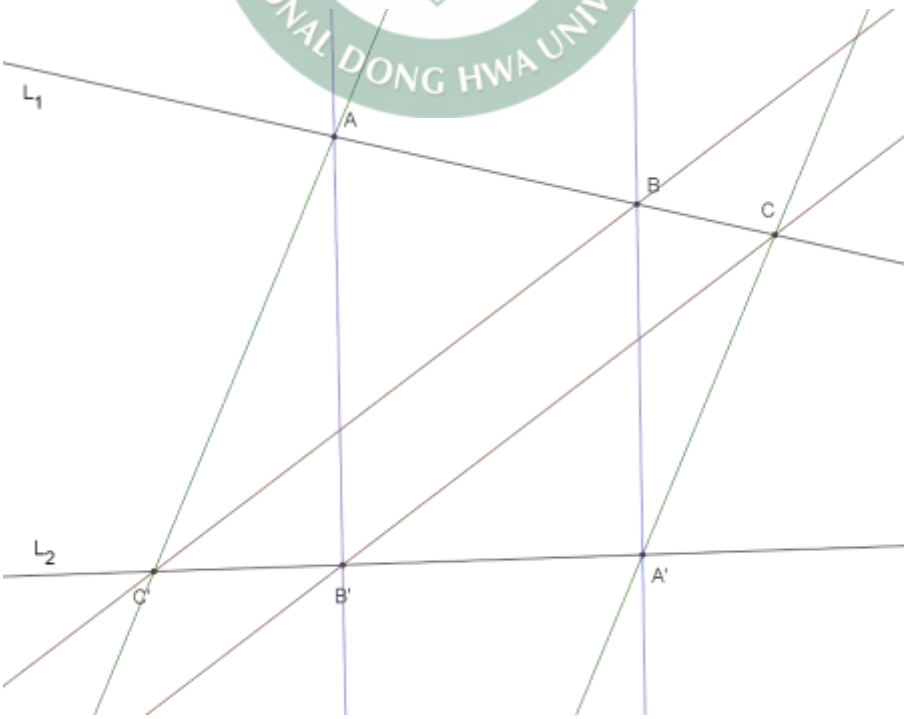


圖 5- 5 帕普斯定理 3

資料來源：研究者整理繪製

此單元是為平行線在無限遠有交點做準備的第一個定理，因為一開始讓學生任意的在紙張上畫兩條線，很多人的圖並不會如圖 5-3 呈現出三點共線的情況，而是在紙張外上才會出現定理中所提到的關係，初期會要求學生黏貼紙張找到交點，後期希望學生透過想像，運用推理的方式判斷是否會有交點。學生的作圖通常不會出現平行，只會得到往某一方向會交到點的兩直線，此時給出時間讓學生一次次自我思辨、自我感知、自我判斷交點在哪裡？是否會有例外？然後會很自然的進入探討兩線平行時該如何處理的問題，初期引發學生注意到「特殊情況」的存在，讓學生自行決定是否加進無限遠點的觀點，或單純視之為特殊情況。

肆、帕普斯定理的對偶定理：



圖 5- 6 帕普斯定理的對偶定理

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 102）繪製

作圖步驟為

1. 任取兩點L_1、L_2，通過點各畫三線 a、b、c 及 a'、b'、c'。
2. 依規則 ab'、$a'b$（兩線交藍色點）；bc'、$b'c$（兩線交綠色點）；ca'、$c'a$（兩線交棕色線），同色兩點連一線，得三線 p、q、r。
   則 p、q、r 三線共點（稱此點 L 為帕普斯對偶點）

初期讓學生自行寫出作圖步驟，比較與帕普斯定理的關係，再慢慢地引導學生能完整的將作圖步驟一一對應，不僅僅是點與線對應，也試著做整體寫作上的對應，在欣賞文字、表象的對應關係外，還有一種內在深層的對應關係。

伍、平行線的關係

提供兩個方式看待平行線在無限遠的關係

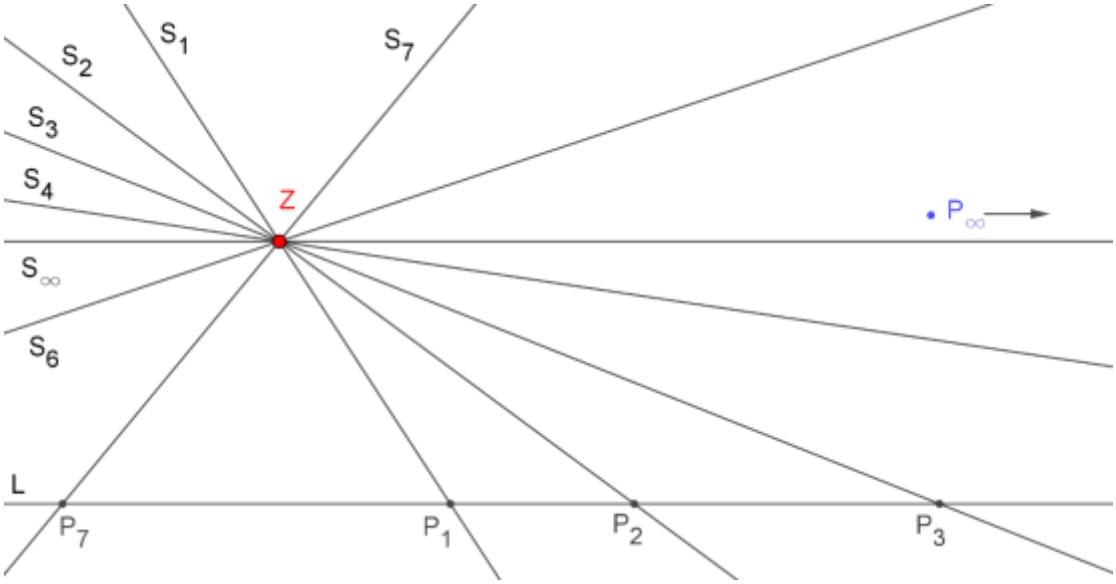


圖 5- 7 克卜勒螺旋槳

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 66）繪製

首先看圖 5-7，想像一直線 L 及線外一點 Z，然後過 Z 點有另一條直線S_n（n＝1，2，3…）與 L 相交，並以 Z 為旋轉中心，逆時針旋轉，導致兩線的交點P_n不斷往右邊移動，當兩線接近平行時，P_n越來越接近無限遠的位置，直到平行之後，再從圖形的左邊出現，而回到原始的位置，那兩線平行時，克卜勒提出交點P_∞在無限遠處，也就是兩平行線存在一個交點，此交點在無限遠處，即**「兩平行線相交於無限遠處」**。

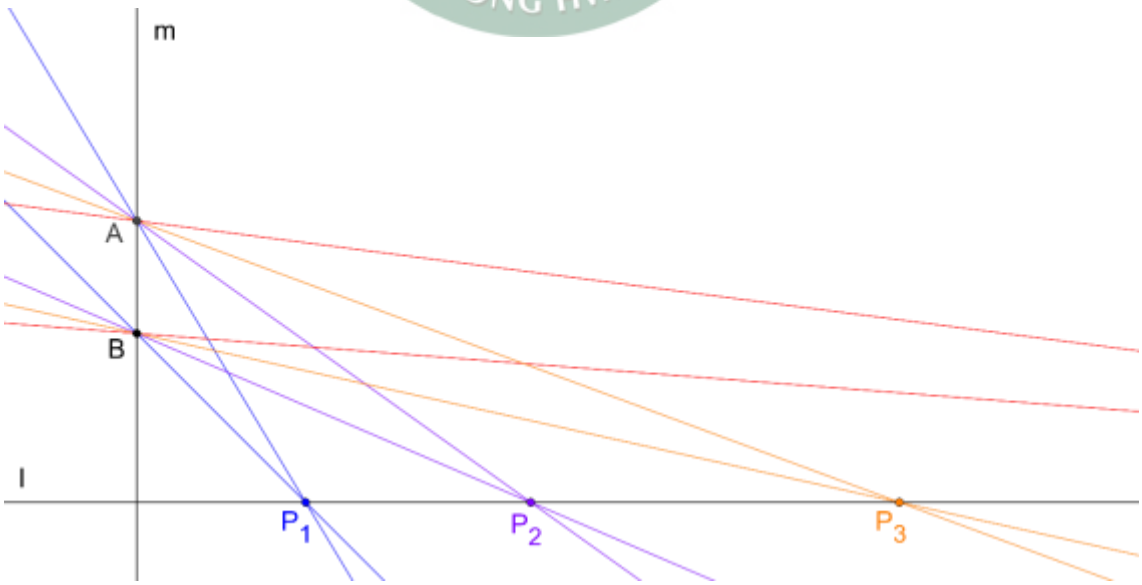


圖 5- 8 平行線交點探索

資料來源：研究者整理繪製

圖 5-8 中，直線 m 上有兩點 A、B，過 A、B 各畫一線，並與 l 線同時有一交點 P_1，想像點P_1是一個動態的點，可以自由的在 l 線上移動，令動點P_n往右邊移動從 P_1到P_2再到P_3，當它到達無限遠時，過 A、B 兩直線會是平行的關係。藉此探討平行線在無限遠有交點的可能性觀點，接著想像此點的數量、位置及大小，讓學生能以清晰的思路、不怕錯的心態陳述心中所感知到的關係，能抒發出內心的疑惑，同時又可以試著以平行線在無限遠有交點的觀點下進行探索。

陸、笛沙格定理及其對偶定理

一、笛沙格定理

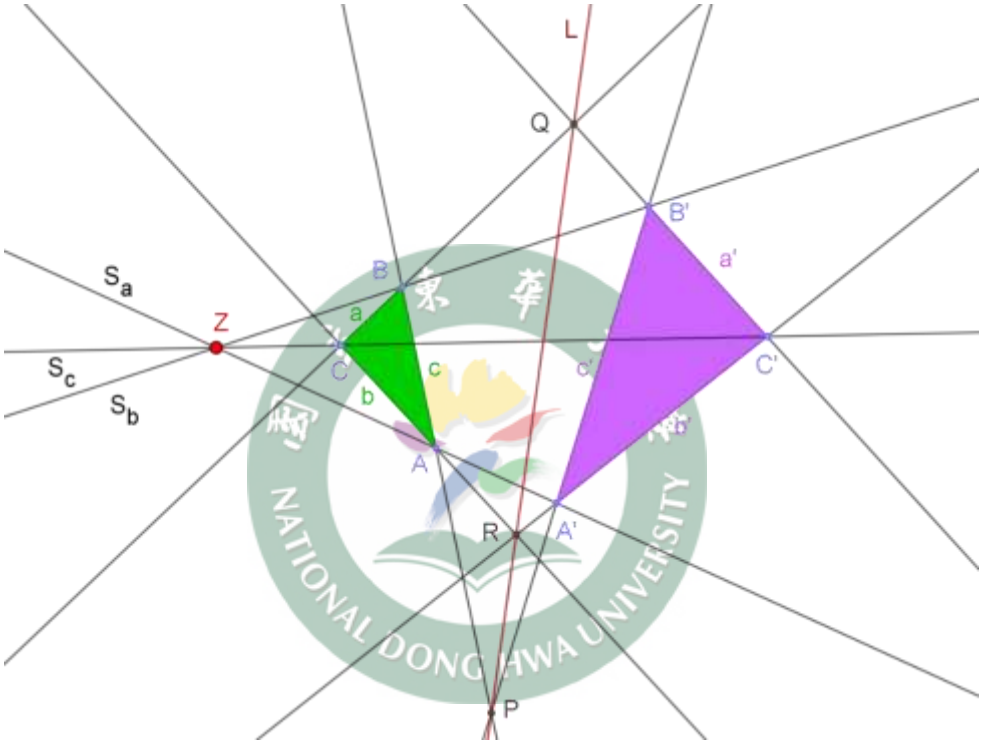


圖 5- 9 笛沙格定理 1

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 76）繪製

圖 5-9 的作圖步驟如下：

(1) 任取一點 Z，過 Z 作三直線S_a、S_b、S_c

(2) 分別在S_a上取點 A、A'、 S_b上取點 B、B'、 S_c上取點 C、C'

(3) 點 A、點 B 的連線 c 與點 A'、點 B'的連線 c'，相交於點 P；
點 B、點 C 的連線 a 與點 B'、點 C'的連線 a'，相交於點 Q；
點 C、點 A 的連線 b 與點 C'、點 A'的連線 b'，相交於點 R
三個交點 P、Q、R 會共線於 L 上

在畫完笛沙格定理之後，在天花板上掛一個三角形，利用投影機將三角形投影至布幕上，讓學生感受到光源即 Z 點、天花板上三角形即△ABC、投影布幕上

的三角形即△*A'B'C'*，請學生拉線將△*ABC* 的各邊延長至投影布幕的平面上，即可得到笛沙格線。透過此過程，將笛沙格定理立體化，在教室內真實呈現。相較於在紙上平面式的討論，空間感受更能貼近學生，讓學生更有感的看見笛沙格定理的美。

二、笛沙格對偶定理

將圖 5-9 的作圖步驟改為：

(1) 任畫一線 L，在 L 上取三點 P、Q、R

(2) 分別過 P 畫線 c、c'；Q 畫線 a、a'；過 R 畫線 b、b'

(3) 線 a、線 b 的交點 C 與線 a'、線 b'的交點 C'，連接成線S_c；
線 b、線 c 的交點 A 與線 b'、線 c'的交點 A'，連接成線S_a；
線 c、線 a 的交點 B 與線 c'、線 a'的交點 B'，連接成線S_b
三條直線S_a、S_b、S_c會共點於 Z 上

讓學生同時寫下笛沙格定理及其對偶定理的作圖步驟，經由帕普斯及其對偶定理的步驟書寫，此時學生可以更掌握住對偶關係，另一方面也引導發現兩個作圖步驟可以呈現在同一個圖上，在原本的圖形中直接翻轉，起點是終點，同時終點變為起點，看見另一種不同的對應關係。

除了圖形本身即具有對偶性質之外。用無限遠點的概念看待笛沙格定理，如果起始點 Z 在無限遠處（圖 5-10），則過 Z 所作的三直線S_a、S_b、S_c會呈現平行的狀態，並不需要將此情況視為例外的圖形。

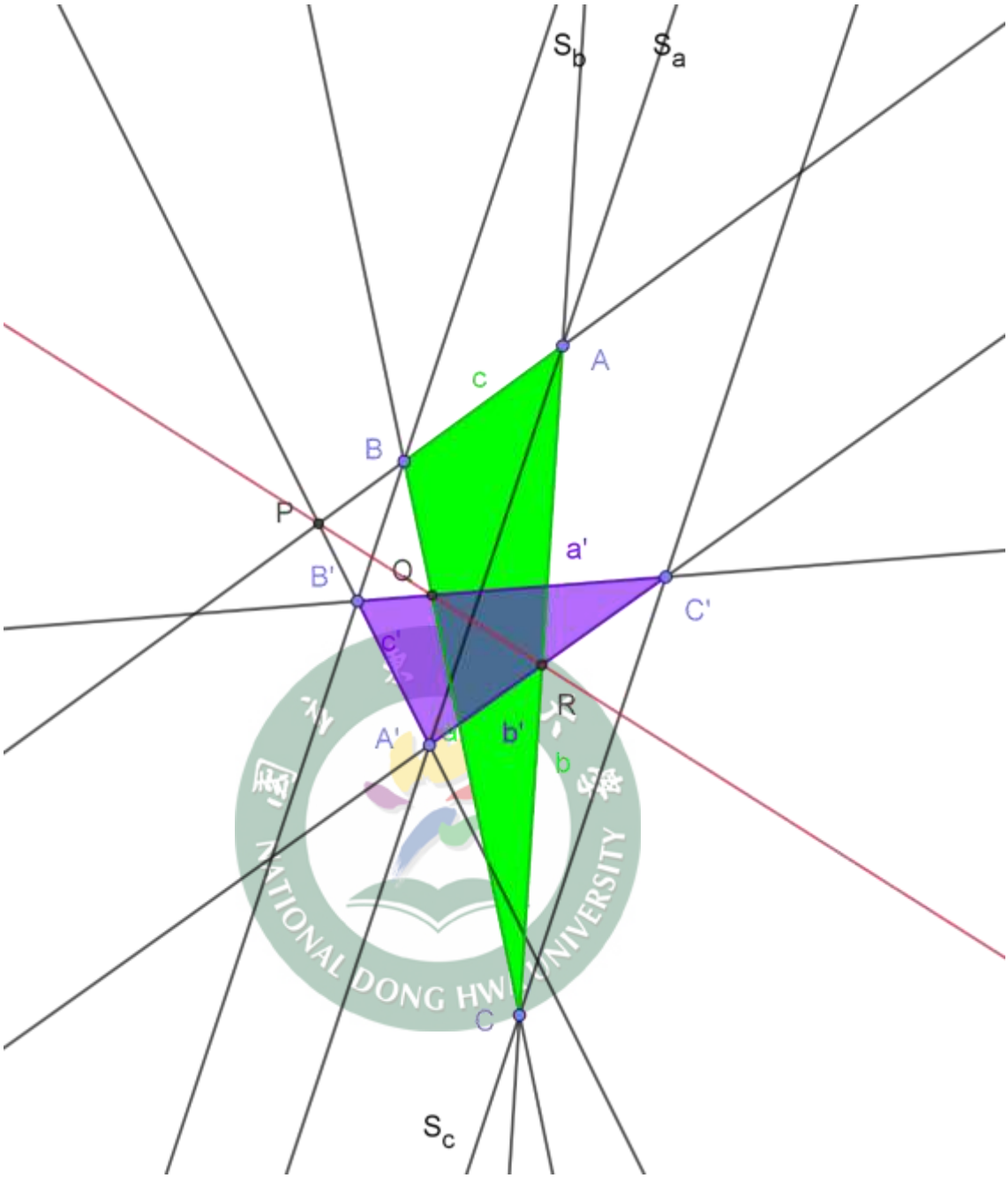


圖 5- 10 笛沙格定理 11

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 83）繪製

圖 5-11，如果直線 *c* 平行直線 *c'*；且直線 *b* 平行直線 *b'*，則直線 *a* 必定也平行直線 *a'*，各自得到交點 *P*、*Q*、*R* 也都會在無限遠處，也就是說笛沙格線落在無限遠的地方。

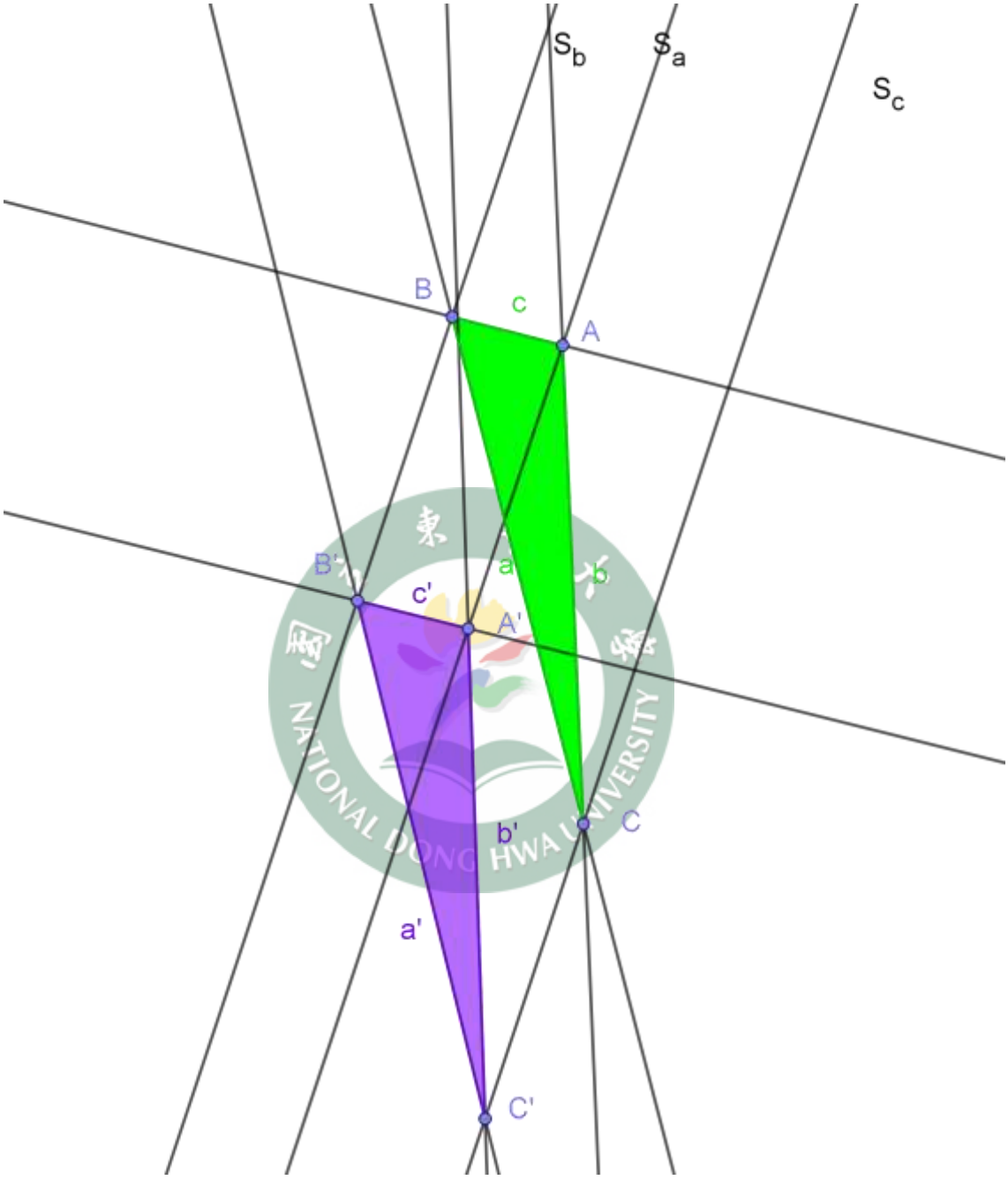


圖 5- 11 笛沙格定理 12

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 83）繪製

三、整體性

從圖 5-9 中，試著用另一種觀點欣賞：改以立體的角度切入，將 *Z* 點視作一個光源，將△*ABC* 所在的平面投影到△*A'B'C'*的平面上，同樣的 *P*、*Q*、*R* 會共線於 *L* 上。換句話說，這樣的性質不僅在平面中成立，在空間中也同樣具備。另一方

面，我們不難看出圖 5-9 中，總共有 10 條線及 10 個同時有三條線通過的點，當我們分別將另外九個點各自視為起始點，重複圖 5-9 的作圖步驟，可以得到如下的九張圖（圖 5-12～圖 5-20）。

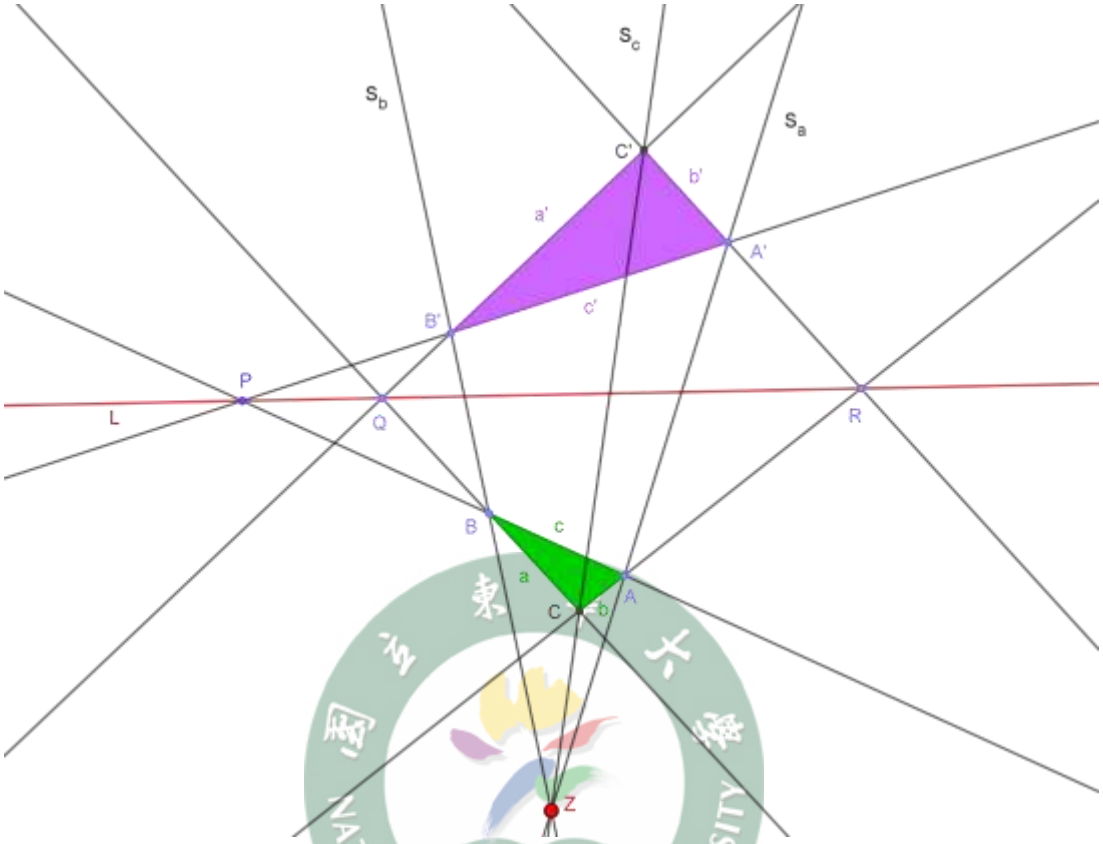


圖 5- 12 笛沙格定理 2

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

國立東華大學 NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

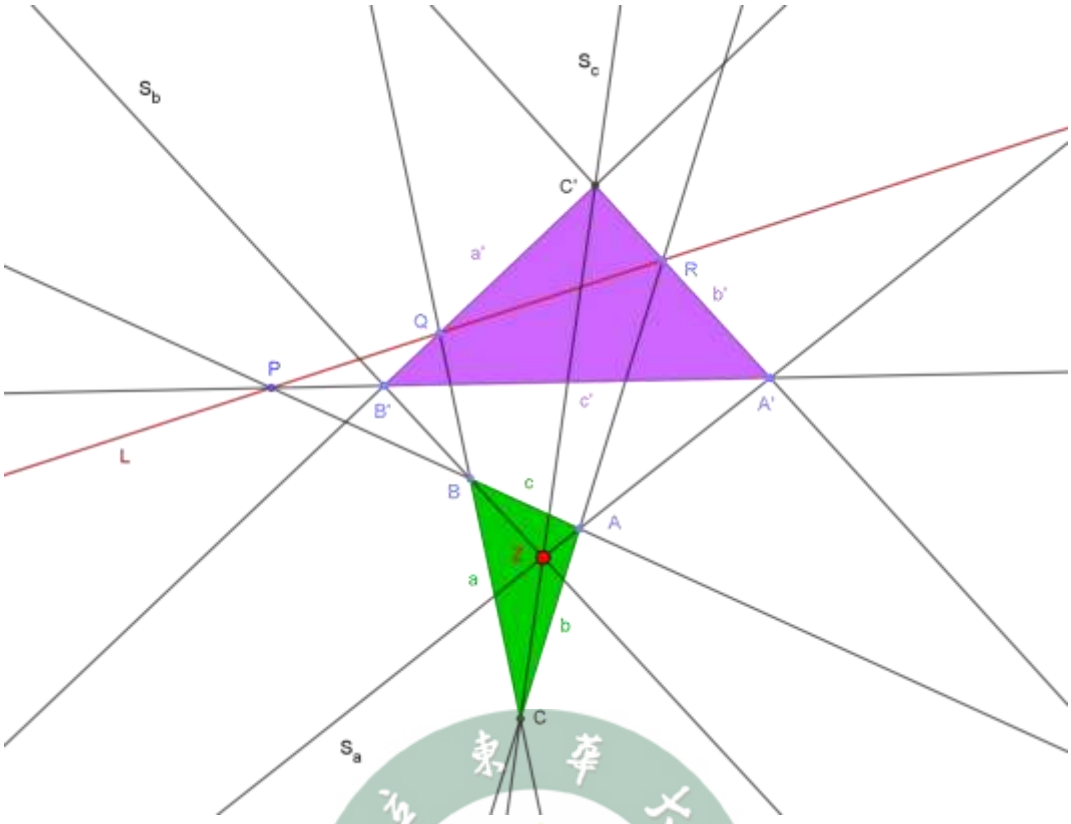


圖 5- 13 笛沙格定理 3

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

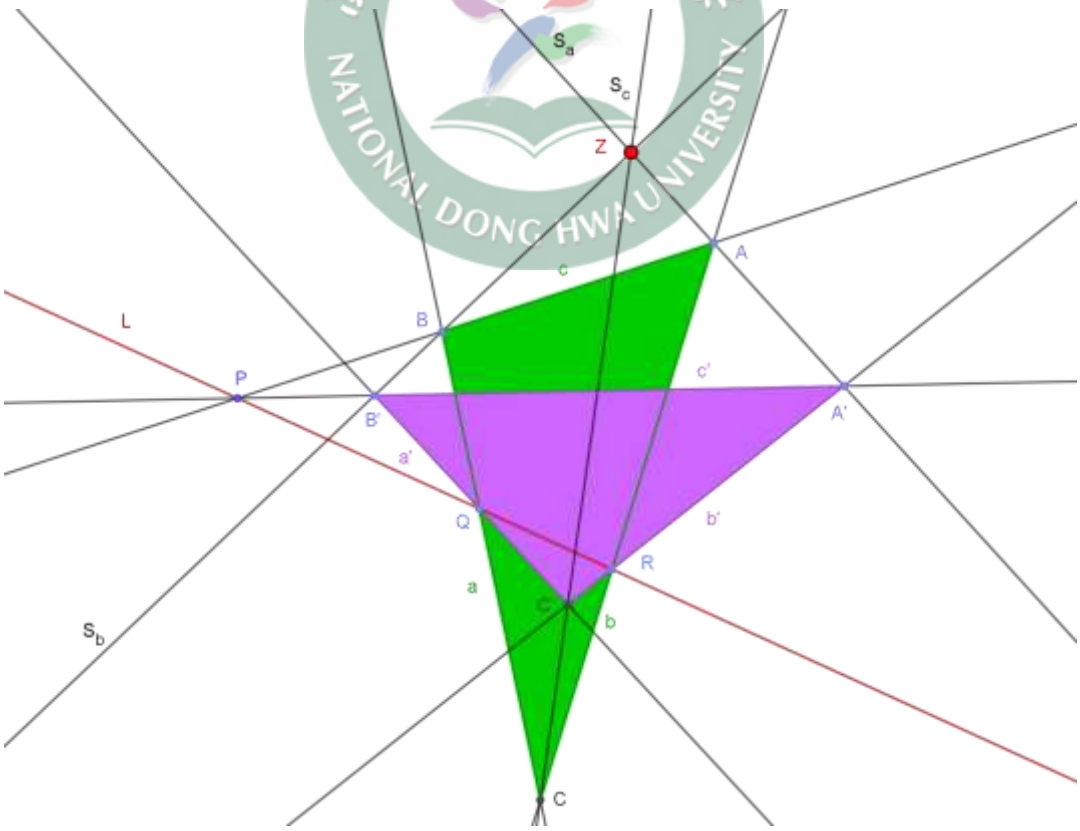


圖 5- 14 笛沙格定理 4

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

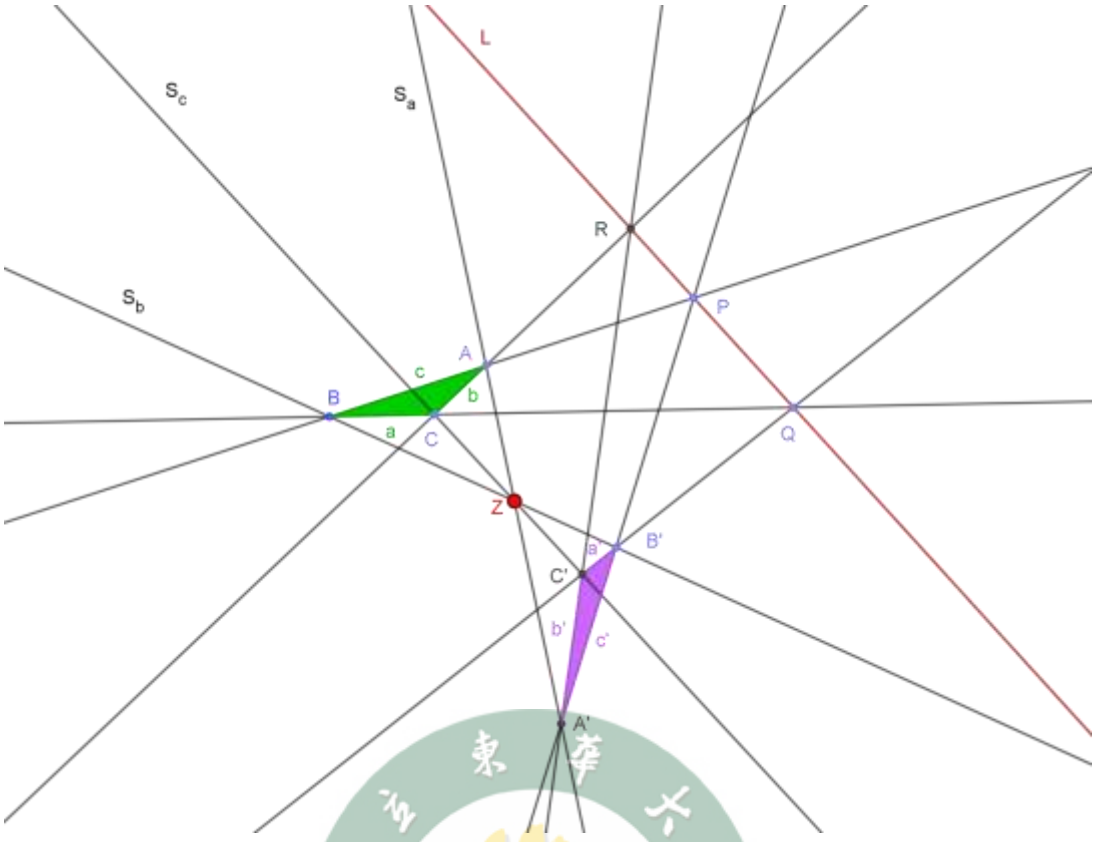


圖 5- 15 笛沙格定理 5

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

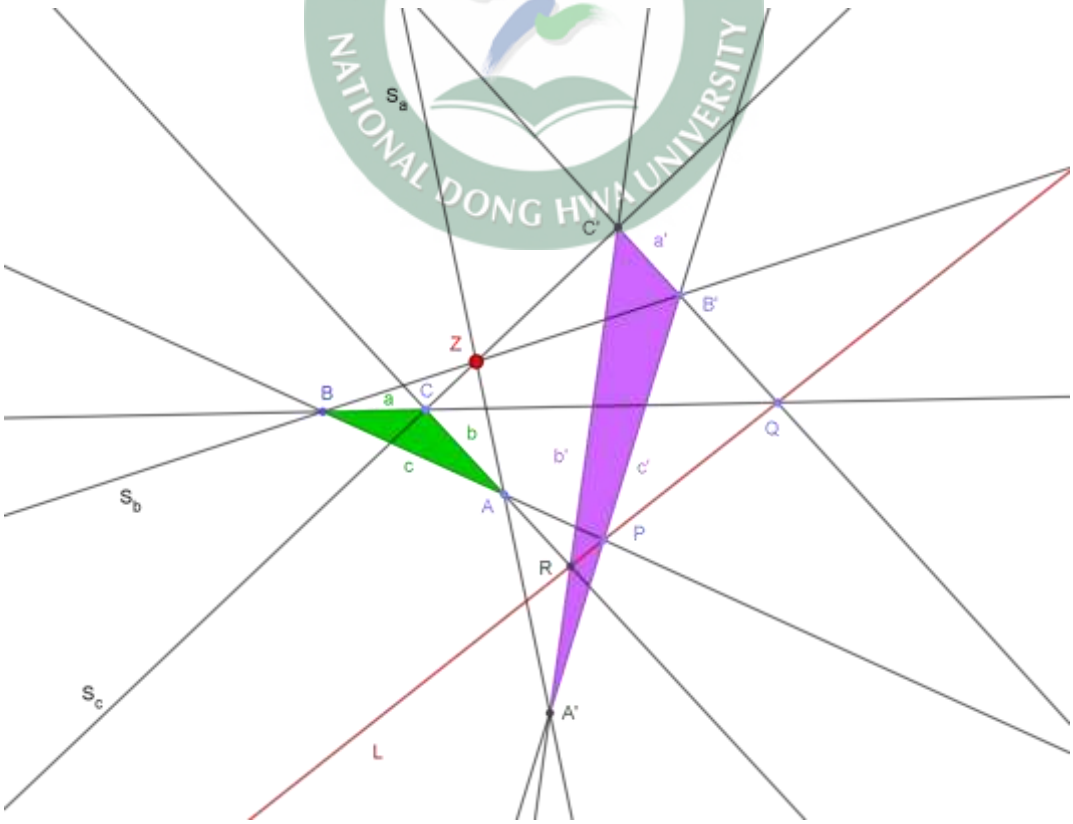


圖 5- 16 笛沙格定理 6

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

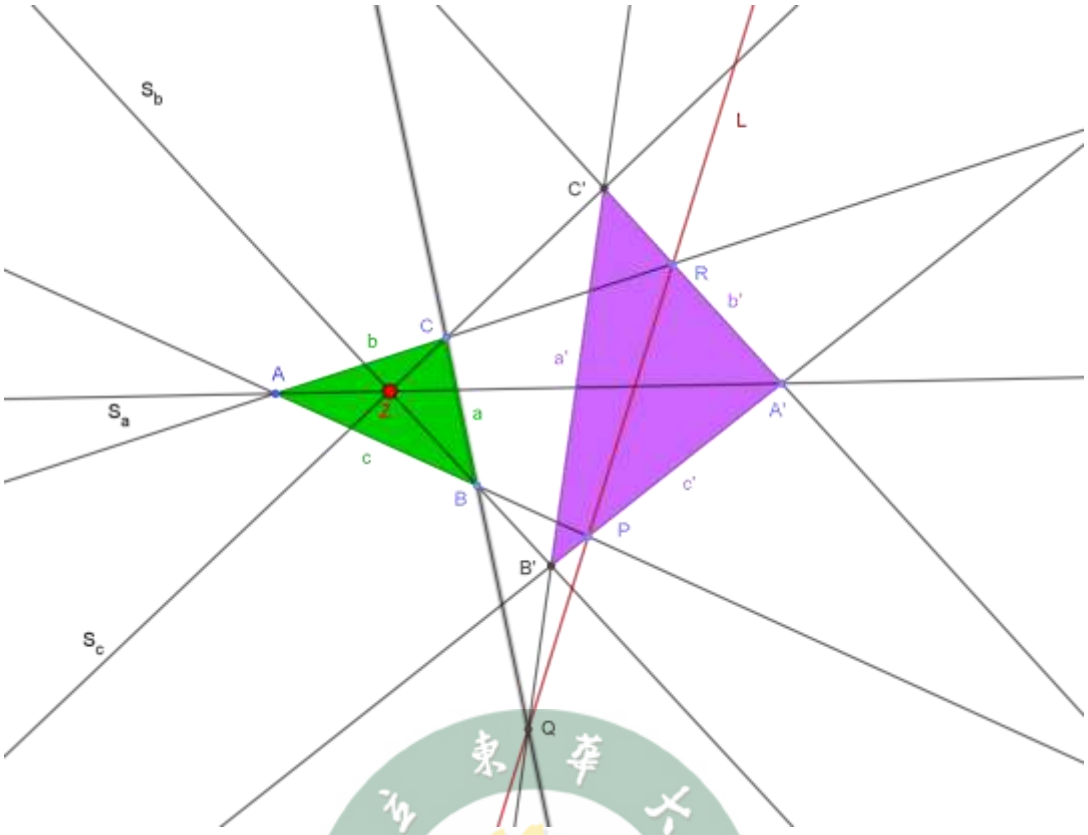


圖 5- 17 笛沙格定理 7

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

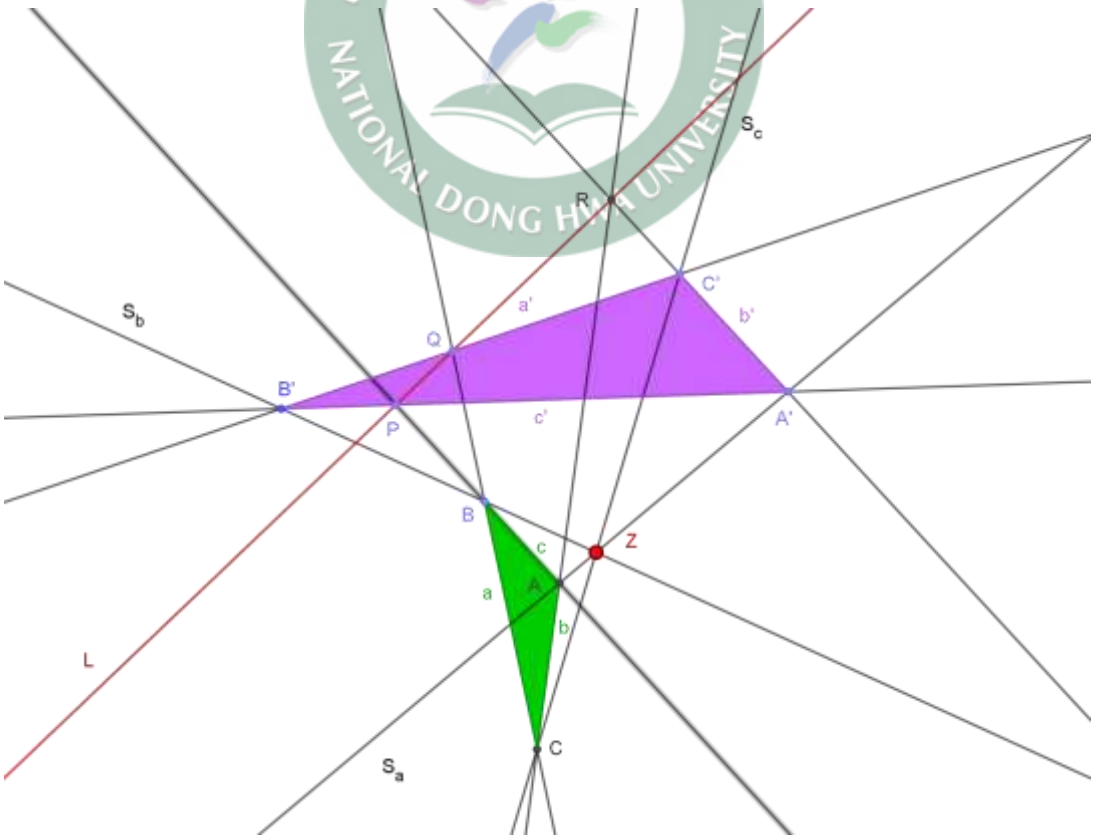


圖 5- 18 笛沙格定理 8

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

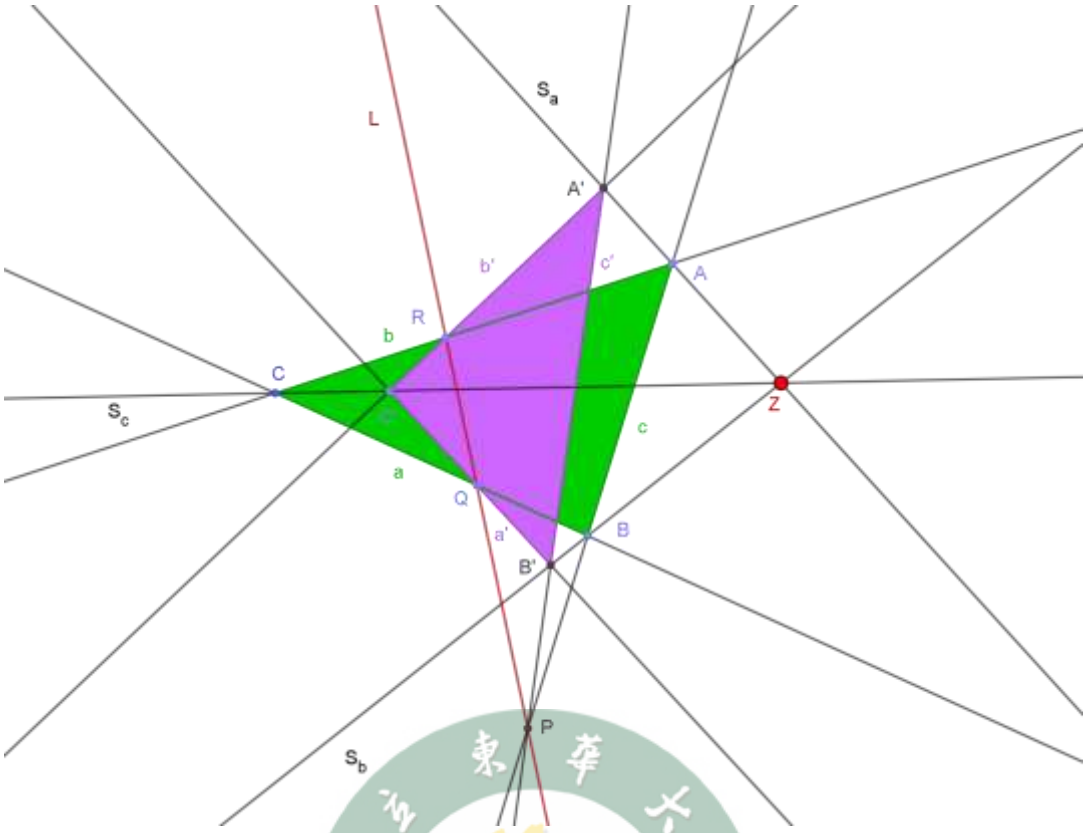


圖 5- 19 笛沙格定理 9

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

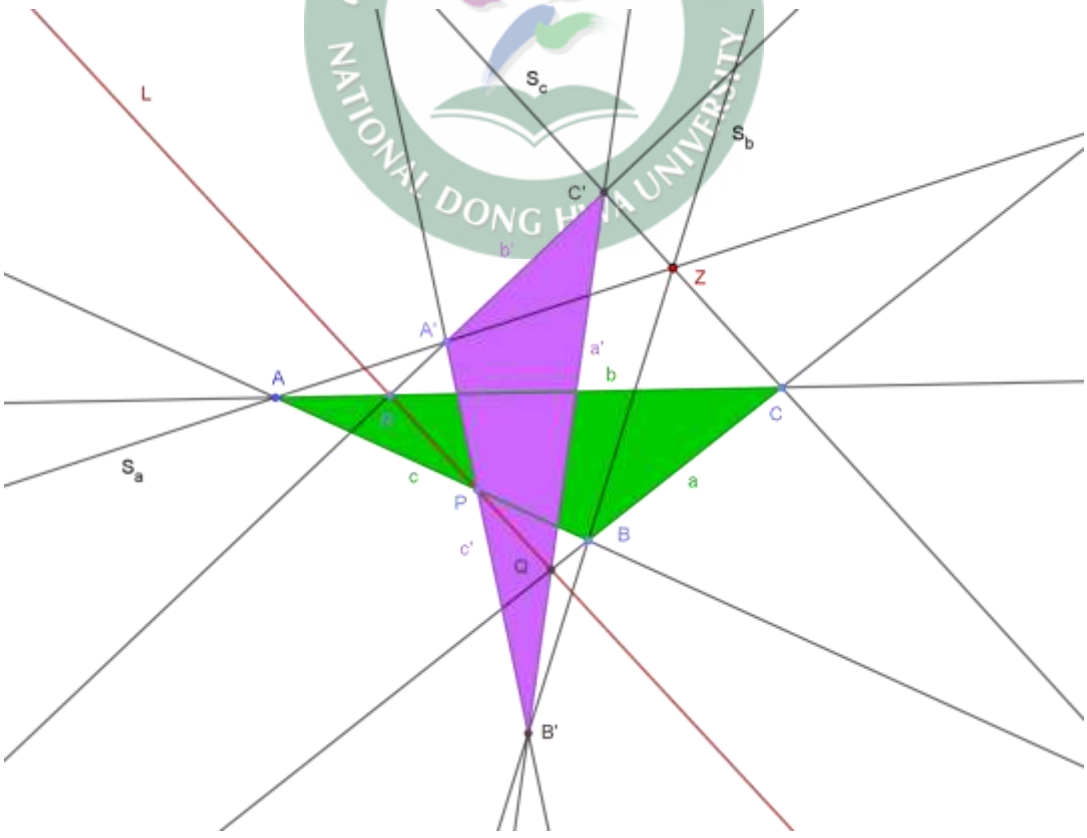


圖 5- 20 笛沙格定理 10

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 77, 78）繪製

上述的十張圖為同一種關係的呈現，神奇的是：這十張圖中，僅有點、線的代號、三角形所圍區域改變，圖形中的點、線都未曾改變位置。也就是說，若單只看笛沙格定理的書寫，不管以哪個點為起始點，內容都是一樣的，換句話說，不論從哪一條線為起始線，也都相同（容士毅譯，2010：243）。這是某種關係的整體圖像，嘗試給學生以整體的概念來欣賞每一個作圖。

柒、巴斯卡定理及布萊安強定理

布萊茲·巴斯卡（Blaise Pascal 1623–1662）提出巴斯卡定理：

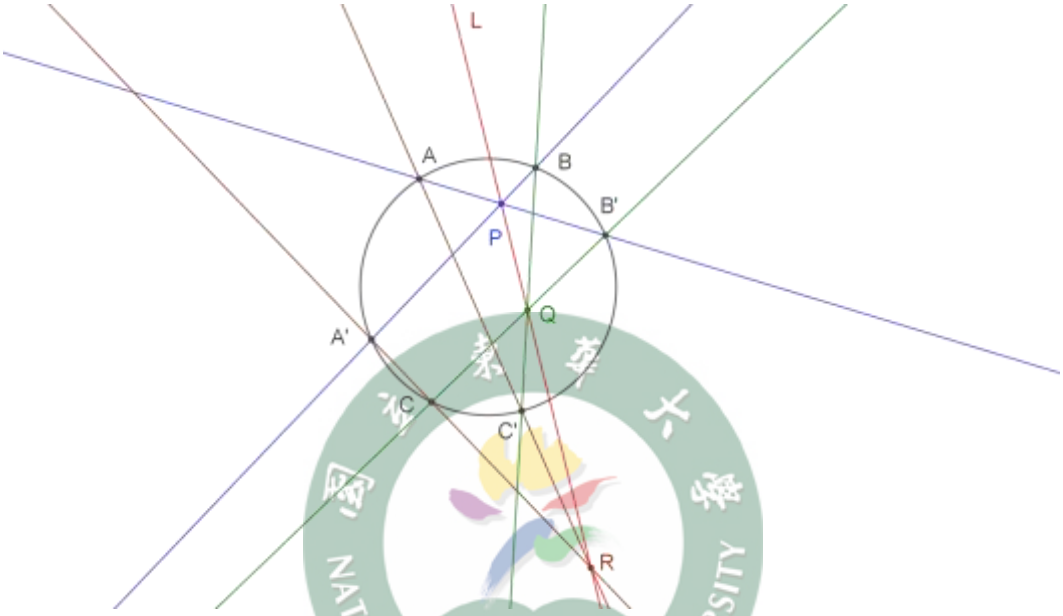


圖 5- 21 巴斯卡定理 1

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 141）繪製

其作圖步驟為

(1) 在圓上任取六點 *A*、*B*、*C*、*A'*、*B'*、*C'*

(2) 連 *AB'*、*A'B* 得交點 *P*（藍色線）、連 *BC'*、*B'C* 得交點 *Q*（棕色線）、連 *CA'*、*C'A* 得交點 *R*（綠色線）

則 *P*、*Q*、*R* 三點共線，我們稱此線 *L* 為巴斯卡線

在巴斯卡提出了其定理的一百多年後，夏爾·朱利安·布萊安強（Charles Julien Brianchon 1783–1864）發現了巴斯卡定理的對偶關係—布萊安強定理：

國立東華大學 NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

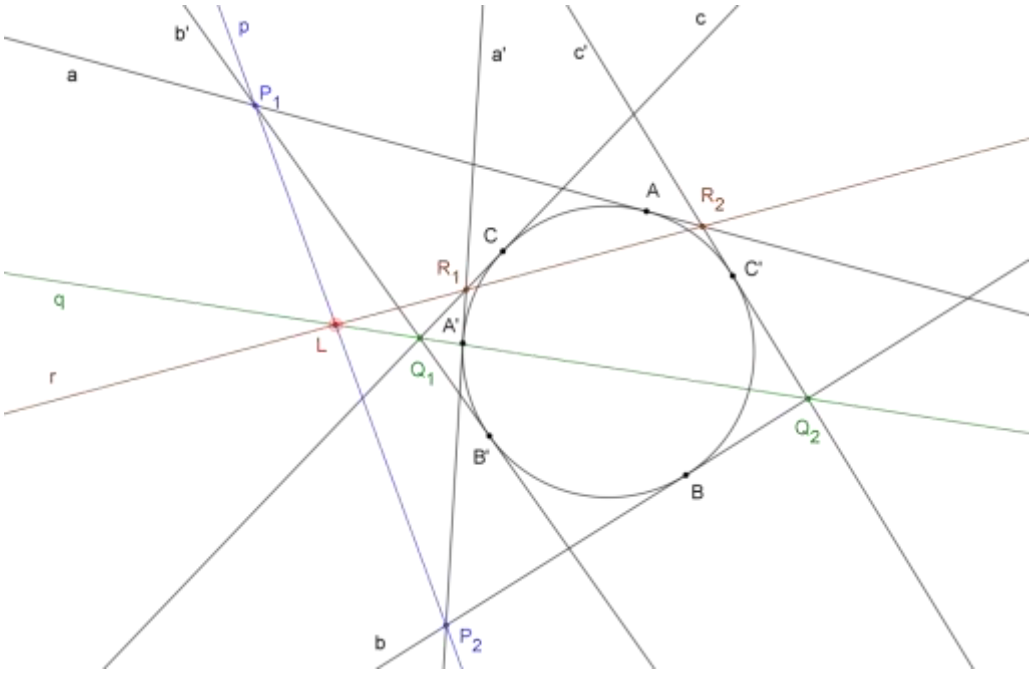


圖 5- 22 布萊安強定理 1

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 141）繪製

作圖步驟為

(1) 在圓上任畫六切線 a、b、c、a'、b'、c'

(2) 連 ab'、$a'b$ 交點得交線 p（藍色線）、連 bc'、$b'c$ 交點得交線 q（綠色線）、連 ca'、$c'a$ 交點得交線 r（棕色線）

則 p、q、r 三線共點

我們稱此點 L 為布萊安強點

當出現平行的狀況

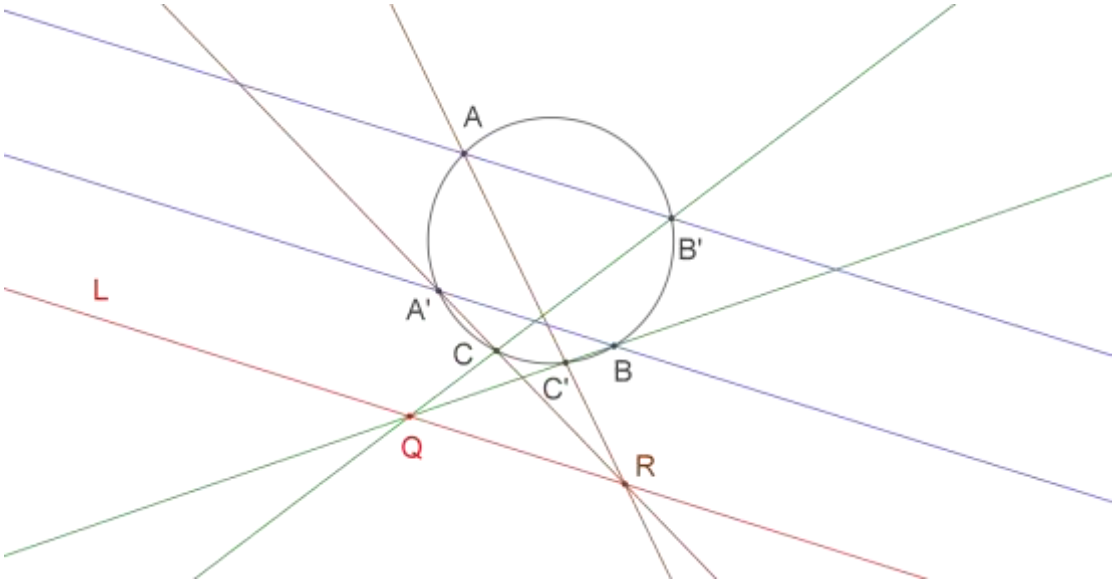


圖 5- 23 巴斯卡定理 2

資料來源：研究者整理繪製

藍色線平行時，P、Q、R、L、綠色線、棕色線的關係與帕普斯定理所形成的關係是相同的。

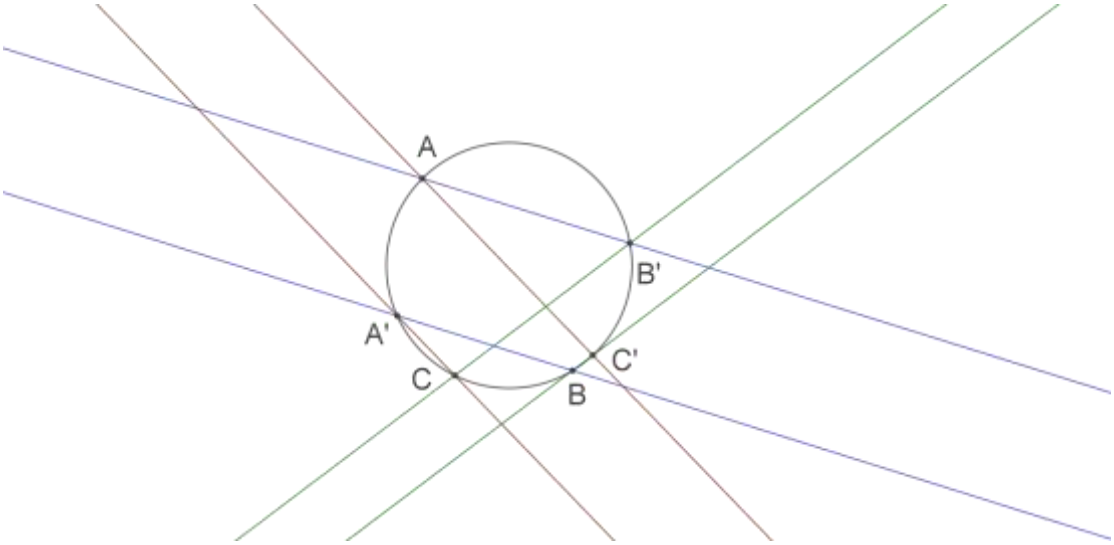


圖 5- 24 巴斯卡定理 3

資料來源：研究者整理繪製

當藍色線平行，且棕色線平行時，P、Q、R、L、綠色線的關係與帕普斯定理所形成的關係是相同的。特別的是，巴斯卡定理不僅在圓上成立，在橢圓、拋物線、雙曲線時也都成立

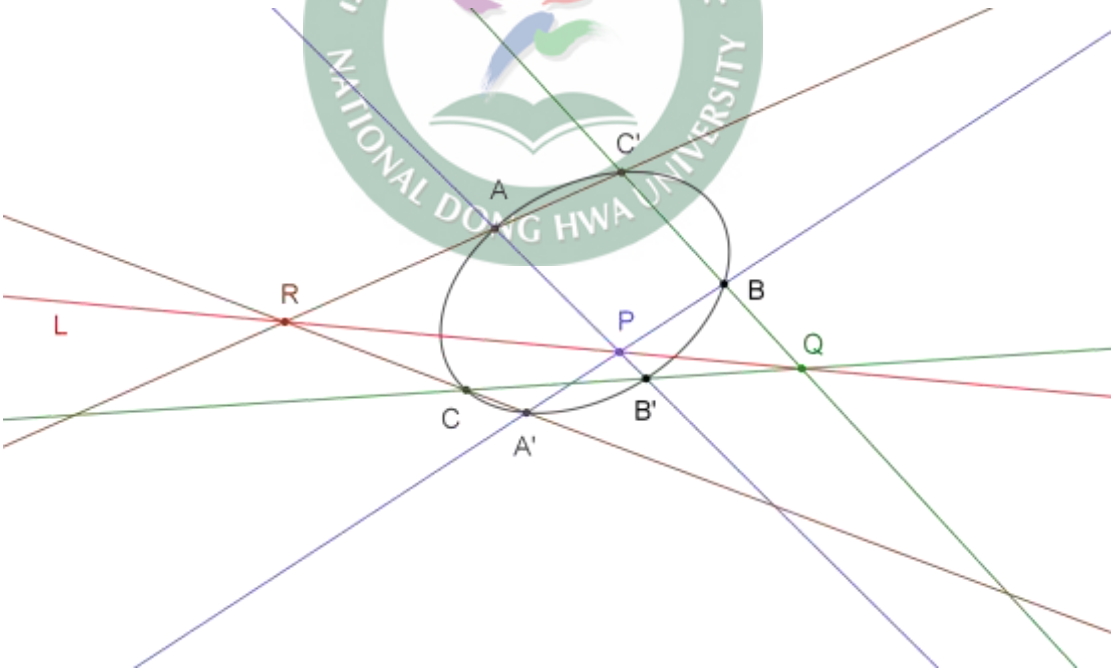


圖 5- 25 巴斯卡定理 4

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 143）繪製

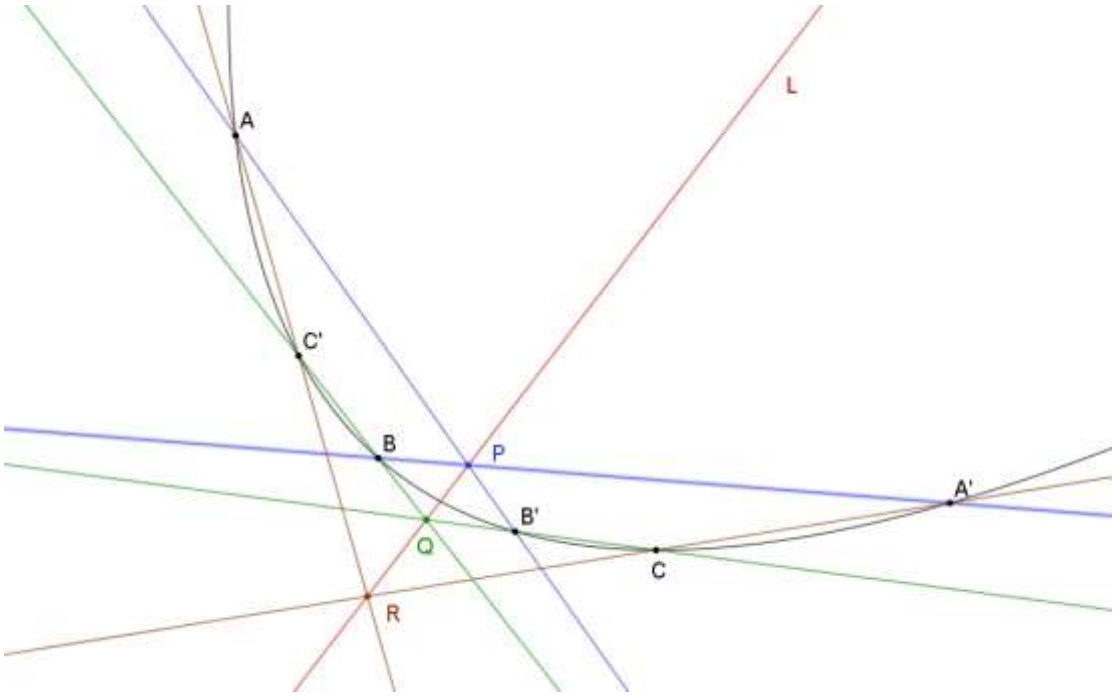


圖 5- 26 巴斯卡定理 5

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 143）繪製

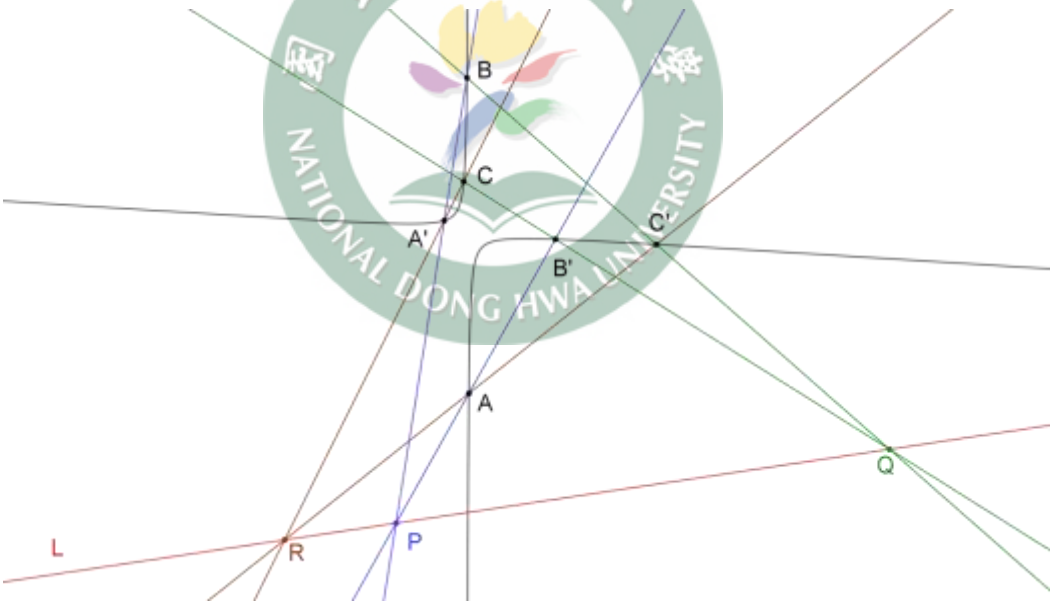


圖 5- 27 巴斯卡定理 6

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 143）繪製

如果我們更廣義的看待圓錐曲線，兩相交直線其實只是「圓錐曲線退化」的情形，所以可以將帕普斯定理視為巴斯卡定理的特例，圖 5-28，A、B、C、A'、B'、C'可以任意的在兩線L_1、L_2上。統一了帕普斯定理及巴斯卡定理，又是另一種整體圖像的呈現，所有的定理在圓錐曲線上是同一個定理，可以用整體的圖像看待每一個部分的關係，而每一個細節的討論都有一致的關係。

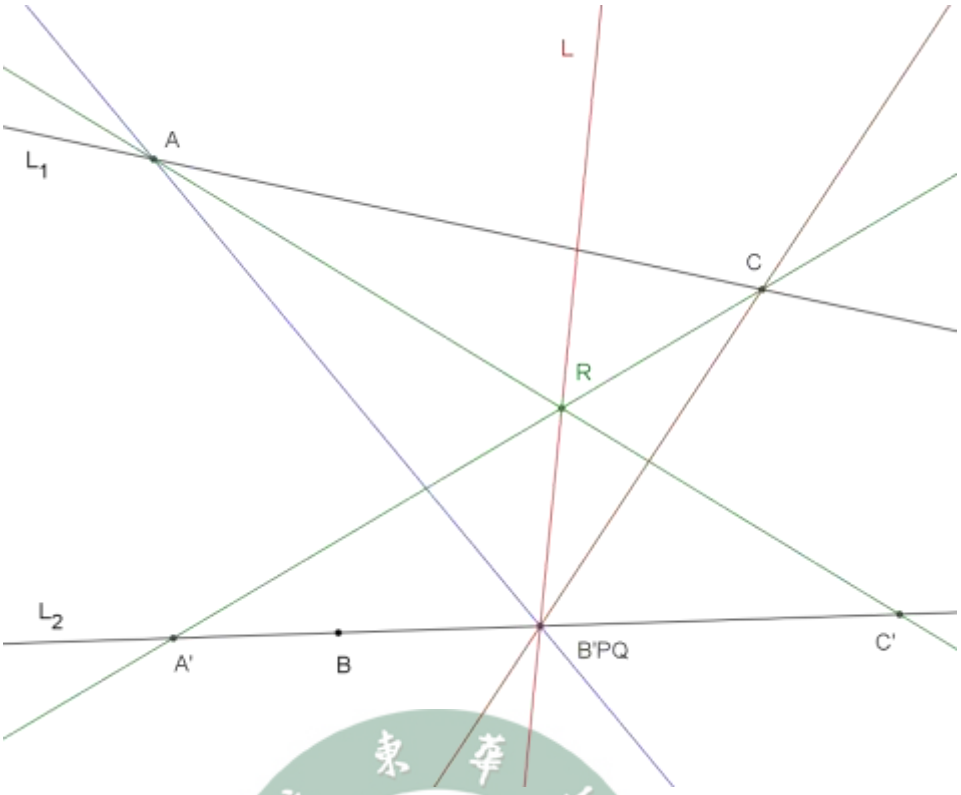


圖 5- 28 圓錐曲線中的帕巴定理

資料來源：研究者整理繪製

在這邊除了將前述的定理作一個整體的圖像，也在圓錐曲線的概念中有了一致性的觀點，一般在做研究時，總是習慣將一道問題切割成很多個部分，從每個部份得到解答來解決原先的問題，當問題解決的同時也該停下腳步，用整體的圖像再次總攬整個過程，產生更深一層的新觀點。

捌、點、線的對偶關係

一、點與線對圓的對偶線與對偶點作法

1. 已知點 *P* 在圓外，作 *P* 點對此圓的對偶線

(1) 作點 *P* 與圓相交的兩切線，得兩切點

(2) 兩切點連線，得線 *l*，則線 *l* 即所求

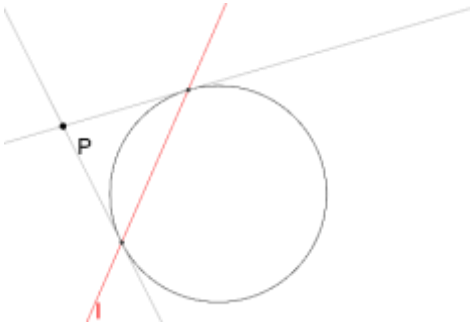


圖 5- 29 點在圓外對偶線

資料來源：研究者整理繪製

2. 已知線 *l* 過圓內，作 *l* 線對此圓的對偶點

(1) 作線 *l* 與圓交點的兩切線，得兩切線

(2) 兩切線交點，得點 *P*，則點 *P* 即所求

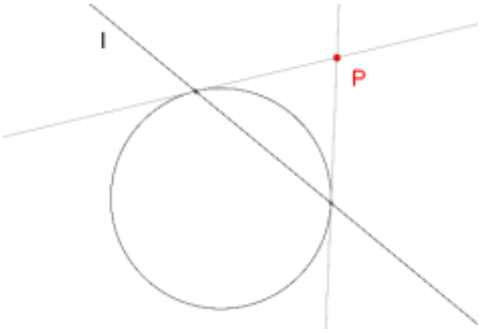


圖 5- 30 線過圓內對偶點

資料來源：研究者整理繪製

3. 已知點 *P* 在圓內，作 *P* 點對此圓的對偶線

(1) 過點 *P* 任作兩線，作兩線的對偶點

(2) 兩點連線得線 *l*，則線 *l* 即所求



圖 5- 31 點在圓內對偶線

資料來源：研究者整理繪製

4. 已知線 *l* 過圓外，作 *l* 線對此圓的對偶點

(1) 取線 *l* 上任兩點，作兩點的對偶線

(2) 兩線交點得點 *P*，則點 *P* 即所求

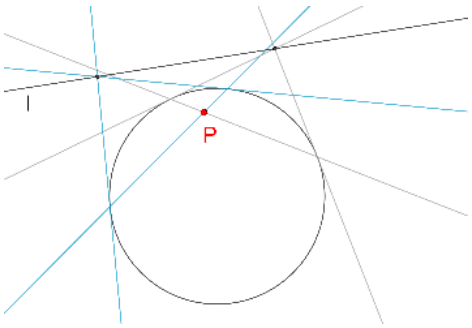


圖 5- 32 線過圓外對偶點

資料來源：研究者整理繪製

二、點（線）的移動與對偶線（點）的關係

圖 5-33 的八個圓之中，每一個都可以視為起始圖，若以順時針看待，點 P 一直往上移動，而線 l 一直往下移動，當點 P 在圓上，過點 P 的切線即為對偶線，當點 P 移動到圓心時，對偶線在無限遠，點 P 移動到無限遠時，對偶線 l 過圓心。

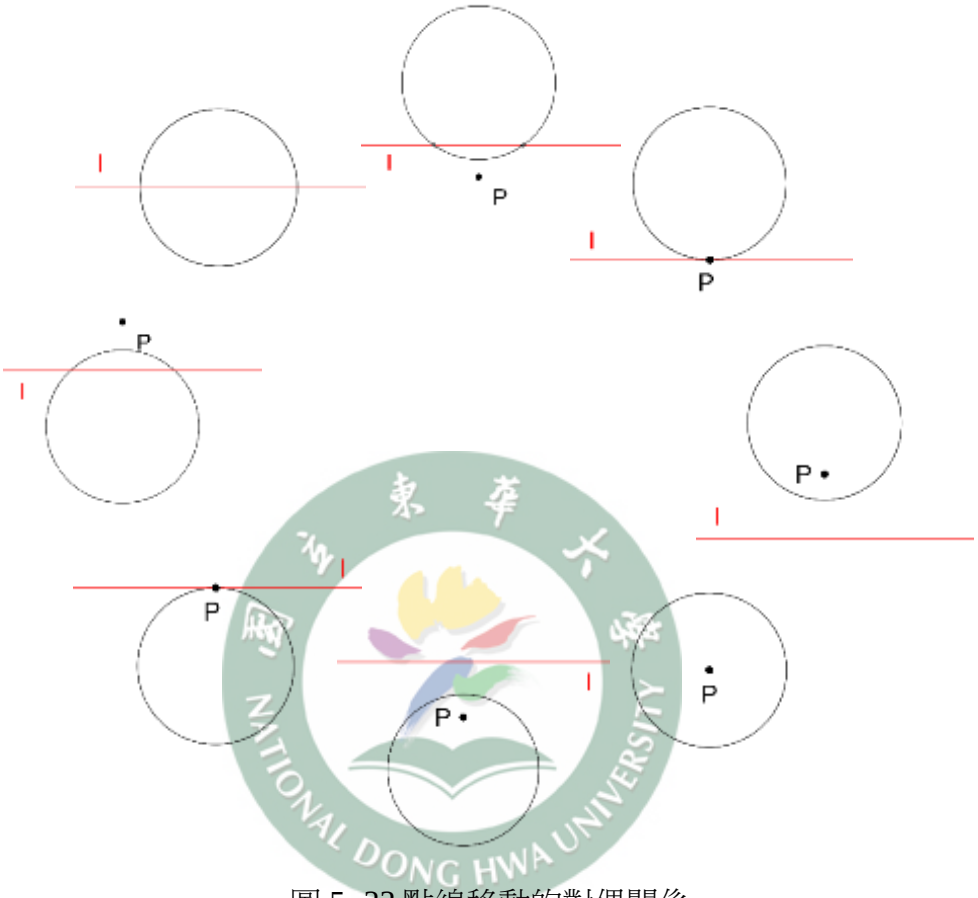


圖 5- 33 點線移動的對偶關係

資料來源：研究者整理繪製

從定理探索對偶及無限遠的關係後，將點、線的對偶關係以一種新的感知方式看待，不僅僅是對偶關係的存在，更可以透過點、線的對偶關係，產生另一種空間存有的關係，藉著無限遠的存在得到點、線完全對應的關係。學生可以更進一步的理解到引進無限遠點的觀念帶來的思考圖像，拓展想像力，讓視覺無法觀看到的地方，透過想像將之連成一個不會間斷的連續過程。

玖、極性圖

極性圖 1：由對偶線形塑出雙曲線

點 P 為圓 C 上的動點，作點 P 對圓 O 的對偶線，形塑出雙曲線。

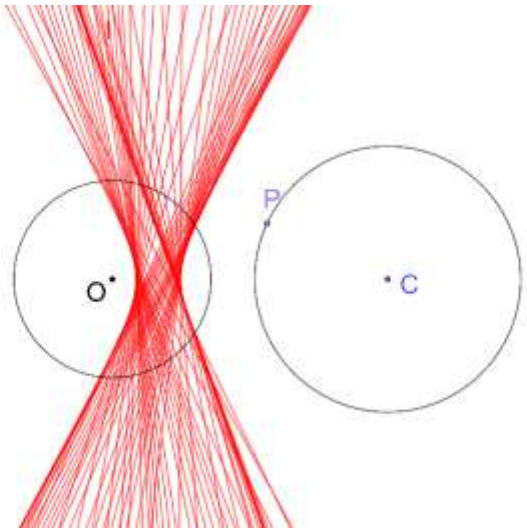


圖 5- 34 對偶線形塑雙曲線

資料來源：研究者整理繪製

極性圖 2：由切線畫出對偶點形塑出雙曲線

將圓 *C* 視為由線 *l* 與圓心 *C* 固定距離旋轉一圈而形成（參考圖 3-6），作線 *l* 對圓 *O* 的對偶點，形塑出雙曲線。

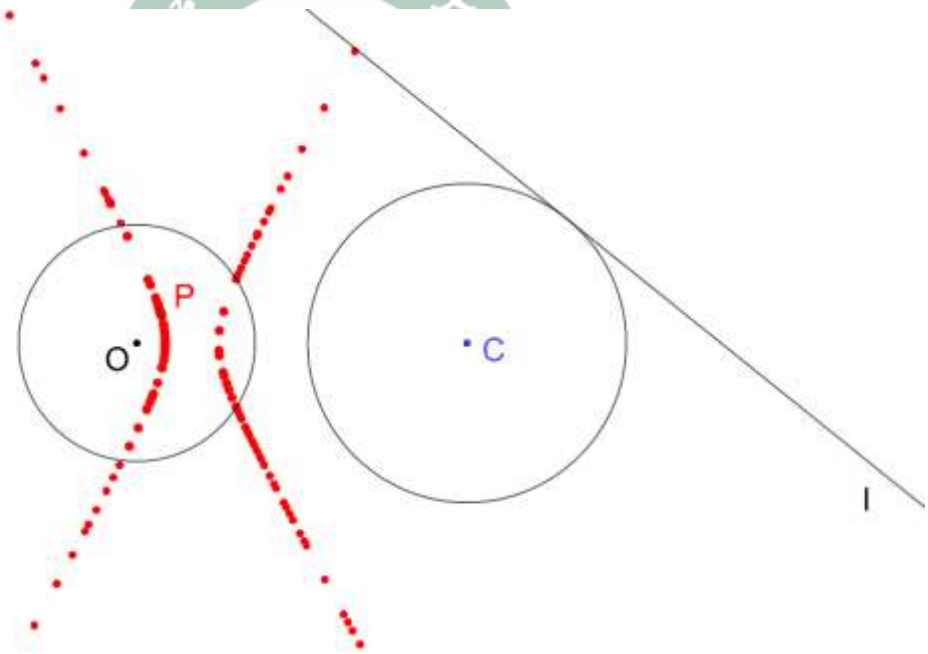


圖 5- 35 對偶點形塑雙曲線

資料來源：研究者整理繪製

極性圖 3；特殊圖形的極性圖

作特殊圖的切線，再作切線的對偶點形塑出其對應的極性圖。

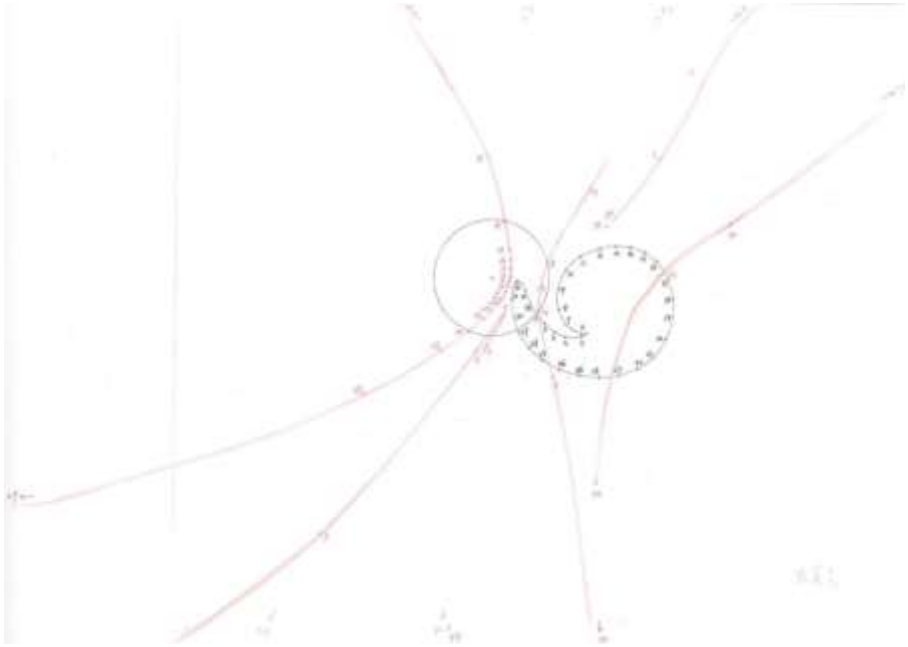


圖 5- 36 對偶點形塑雙曲線

資料來源：研究者整理繪製

由圖形的連續性感知極性圖因無限遠而連續，感受圖形的美麗對應關係，每一個觀點都可以有不同方式切入觀看，讓想像更自由奔放。

拾、曲線變換

一、曲線變換作圖步驟

1. 先固定畫出直線 L、L_x、L_y及兩點 P、Q

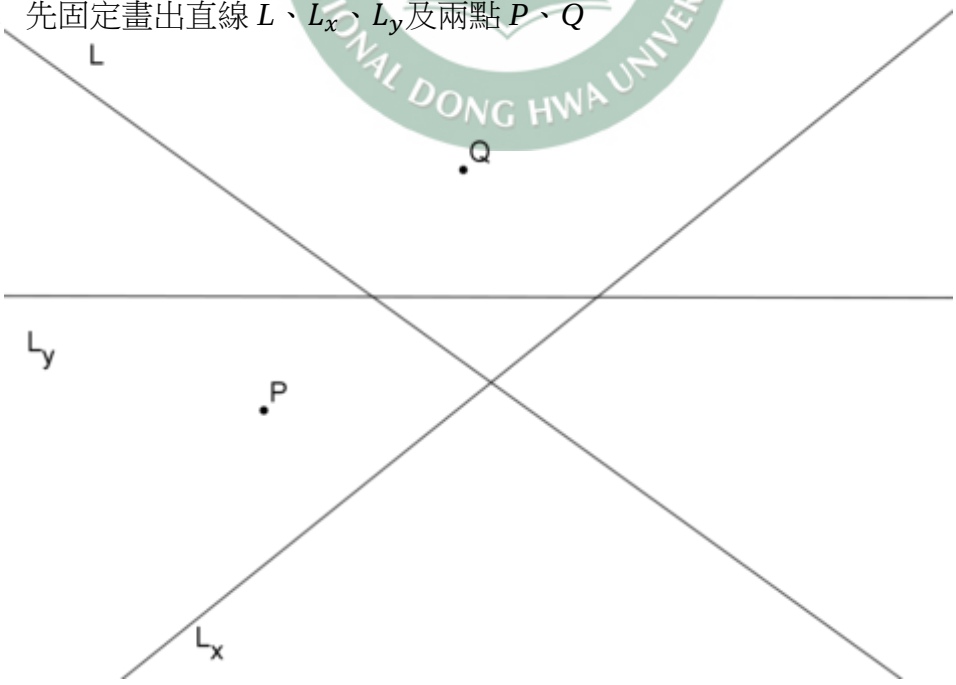


圖 5- 37 曲線變換步驟 1

資料來源：研究者整理繪製

2. 在 L 上任取一點L_1，連L_1P 交L_x於X_1，連L_1Q交L_y於Y_1，連X_1Y_1得直線l_1

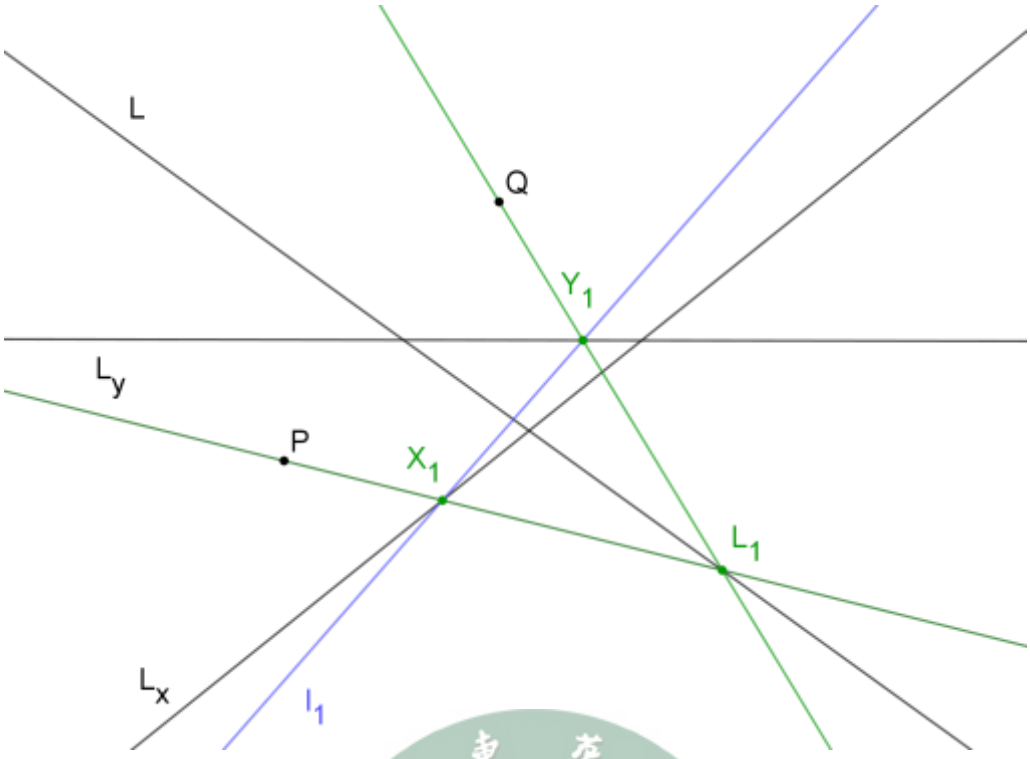


圖 5- 38 曲線變換步驟 2

資料來源：研究者整理繪製

3. 在 L 上任取一點L_2，連L_2P 交L_x於X_2，連L_2Q交L_y於Y_2，連X_2Y_2得直線l_2（步驟 2.的作圖痕跡只保留點L_1與直線l_1）

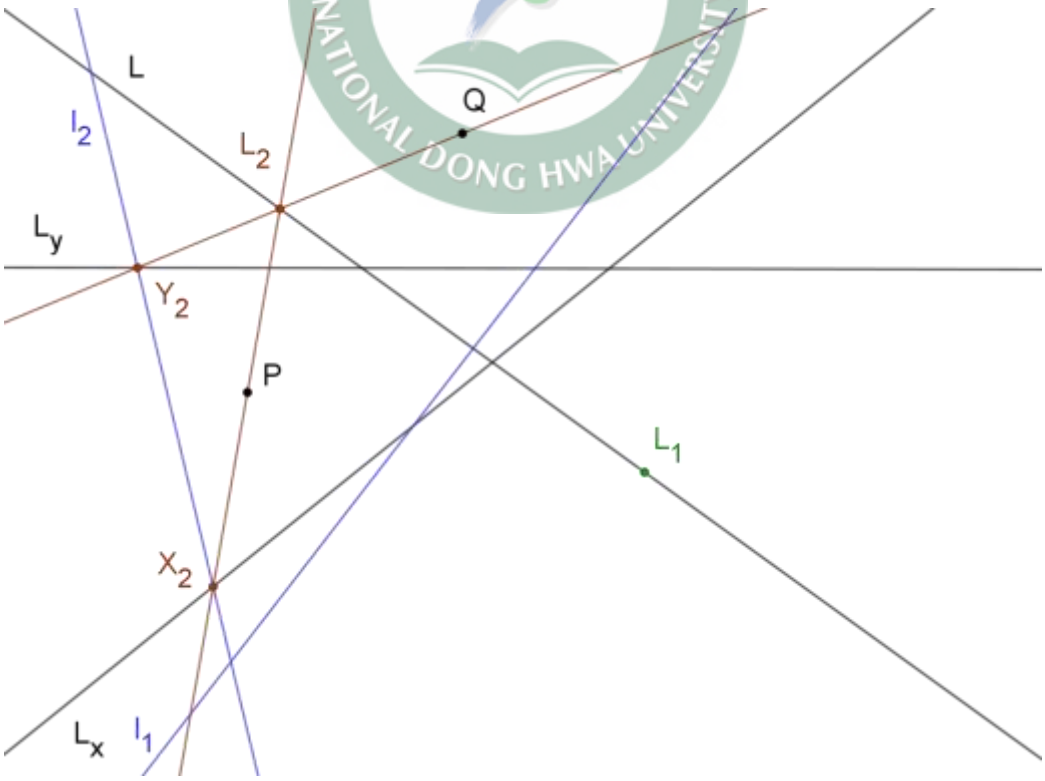


圖 5- 39 曲線變換步驟 3

資料來源：研究者整理繪製

4. 重覆步驟 2.及步驟 3.，畫出大量的直線l_n，並且只保留最後的直線l_n，得到如下的圖形

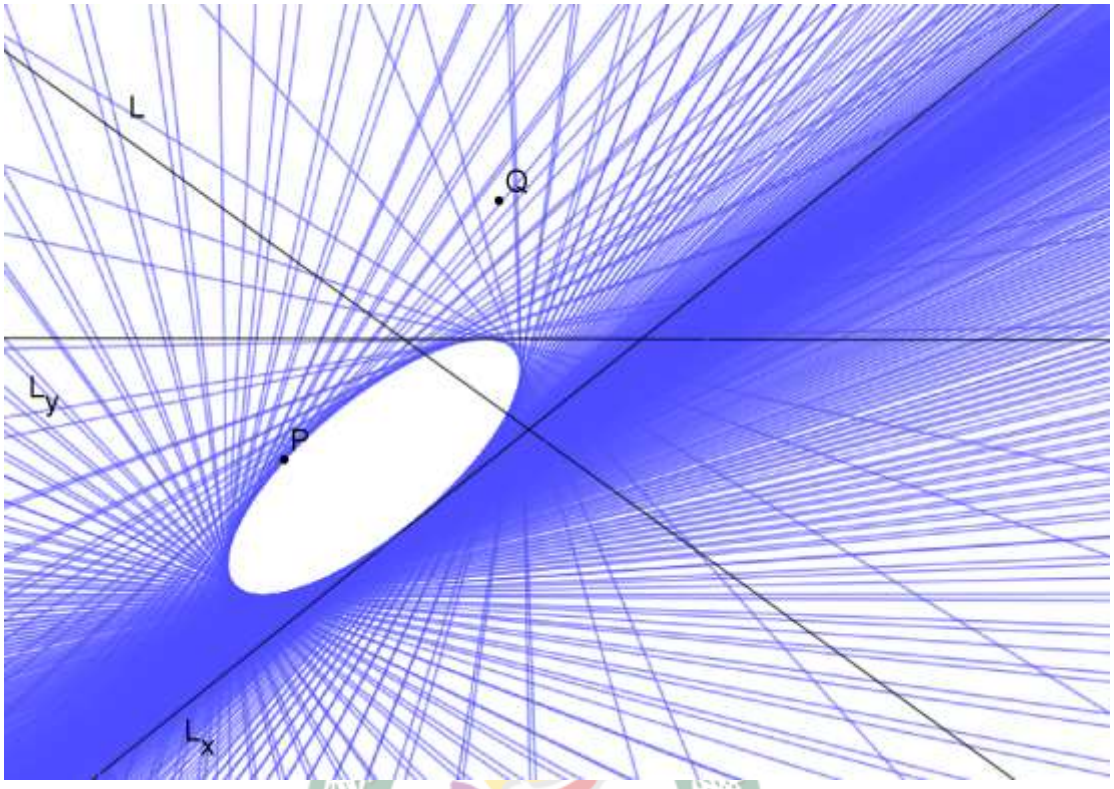


圖 5- 40 曲線變換步驟 4
資料來源：研究者整理繪製

完全由直線的作圖，卻能直接形塑出曲線的存在，首度不藉由曲線來創造，是一種更自由的創作，感受為何有人能發現這樣的關係，這不只是思考能得到，是要將心魂大量投入其中，將問題意識長存心中，直到靈光「突然」來到。帶著學生體會到，為何當大家都只看到水往下流，東西往下掉，卻有人可以看見是往地心掉，這需要多少知識累積、多少問題意識、多少時間奮戰才能產生的結果。這階段的學生很怕做白工，但願意為自己有感的問題長時間與之搏鬥，那怕看似失敗，也會留下可貴的生命經驗。

拾壹、曲線變換的連續性

現代的數學因為笛卡爾的解析幾何，將代數與幾何結合，所有圖形都能切割至每一個點來探討關係性，影響著許多重要的數學概念，而笛沙格的幾何觀點就被這樣的一波大浪所淹沒，所幸經過多數人的自由思考，在後人的推廣中可以更完備笛沙格在圓錐曲線中的觀點，圖 5-41 至圖 5-50 同上述四個步驟完成，僅改變直線L_y的相關位置，保持直線L_y由下方往上移動，得到如下的系列圖形

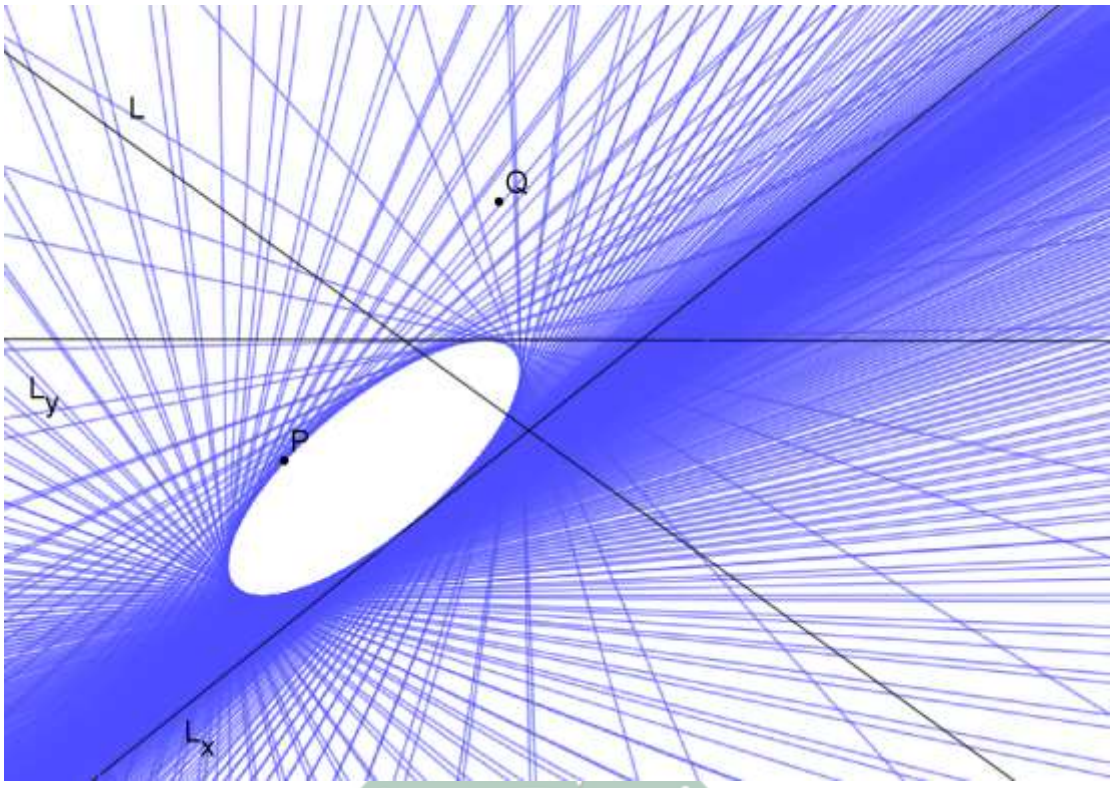


圖 5- 41 曲線變換圖 1

資料來源：研究者整理繪製

L_y在 L 及L_x的交點下方，形成橢圓

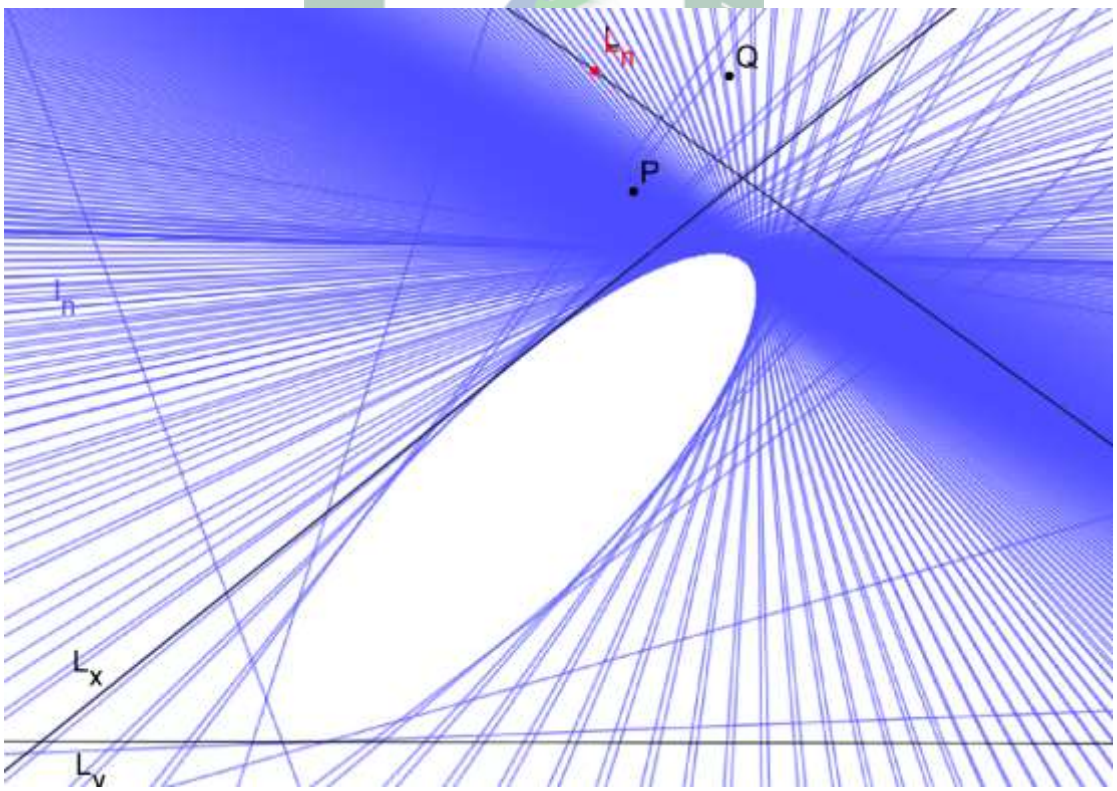


圖 5- 42 曲線變換圖 2

資料來源：研究者整理繪製

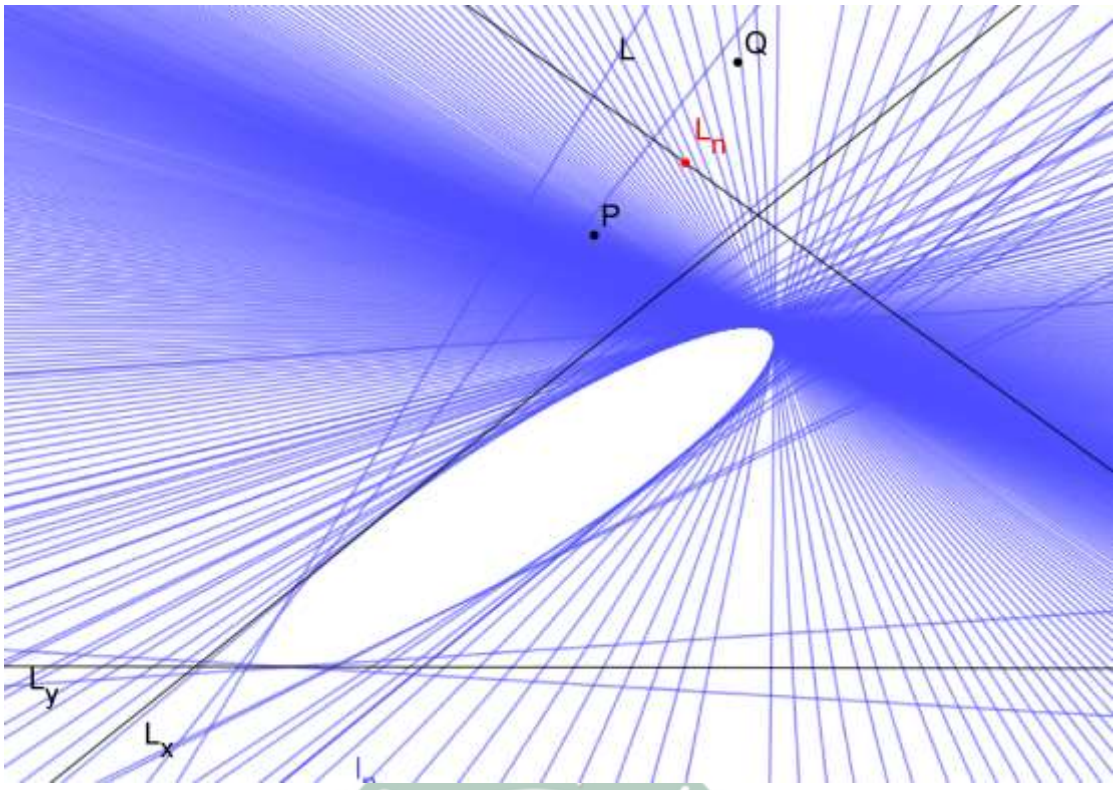


圖 5- 43 曲線變換圖 3

資料來源：研究者整理繪製

L_y往上移動變成雙曲線

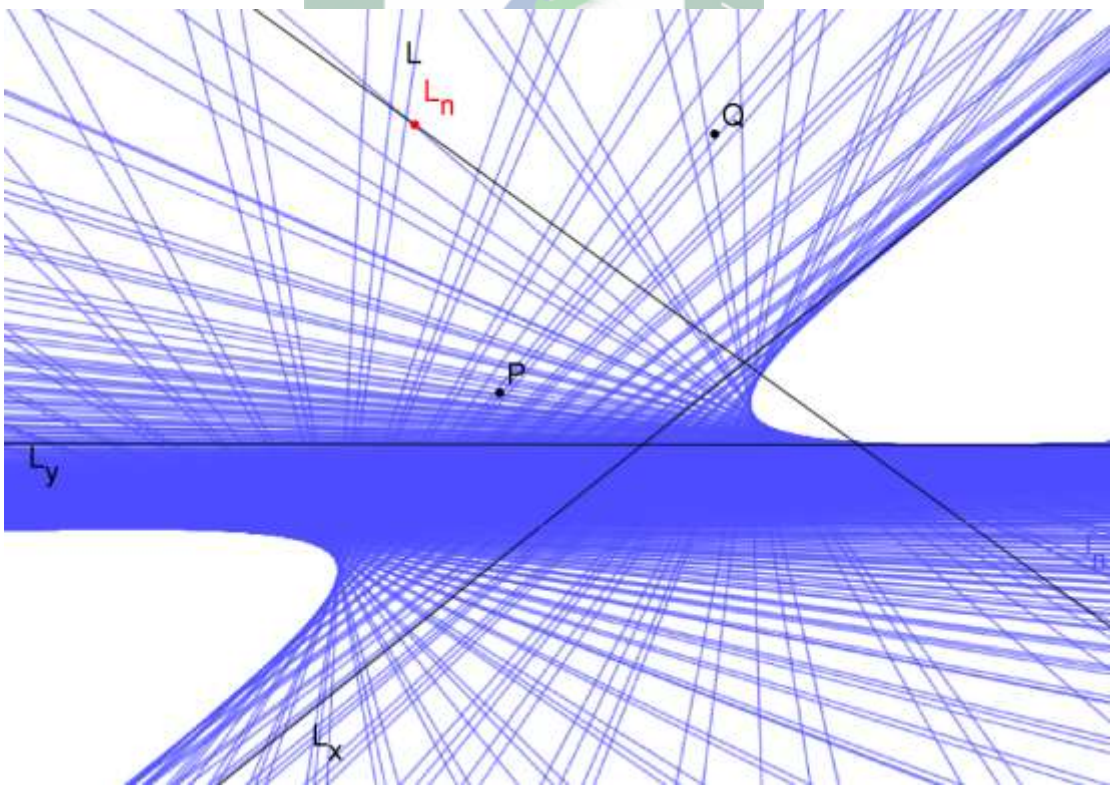


圖 5- 44 曲線變換圖 4

資料來源：研究者整理繪製

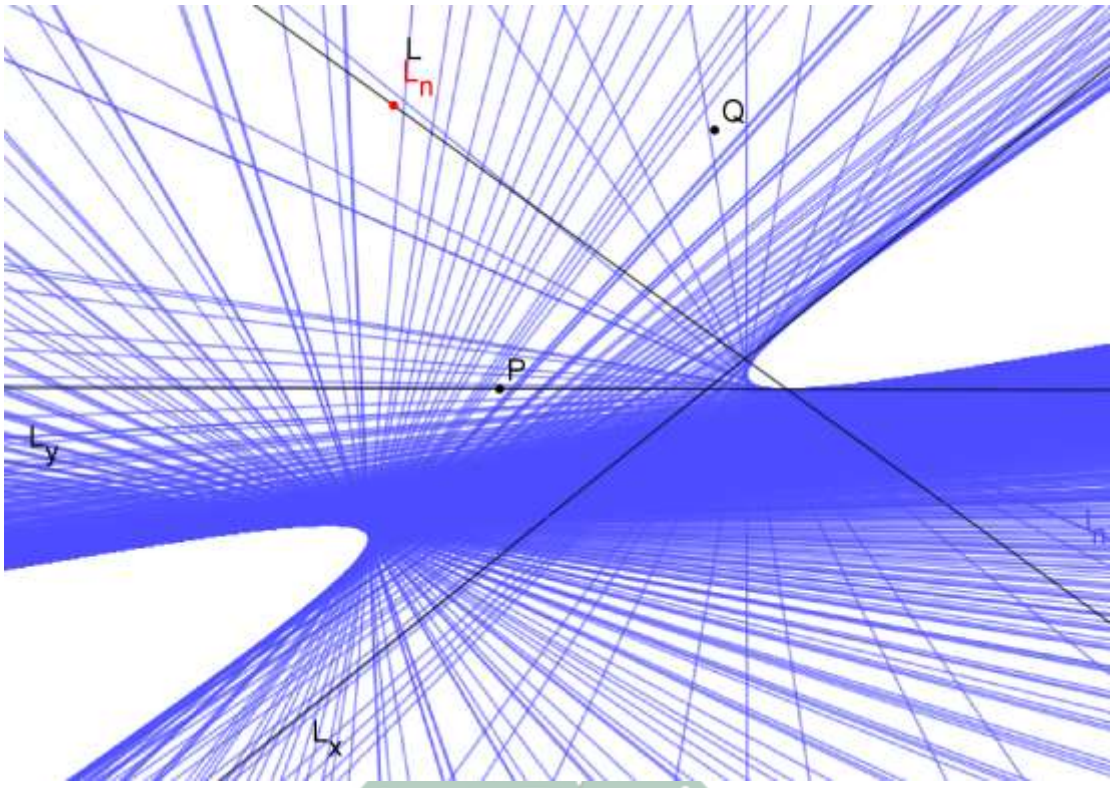


圖 5- 45 曲線變換圖 5

資料來源：研究者整理繪製

當L_y過 L 及L_x的交點，所有的直線l_n均過同一點

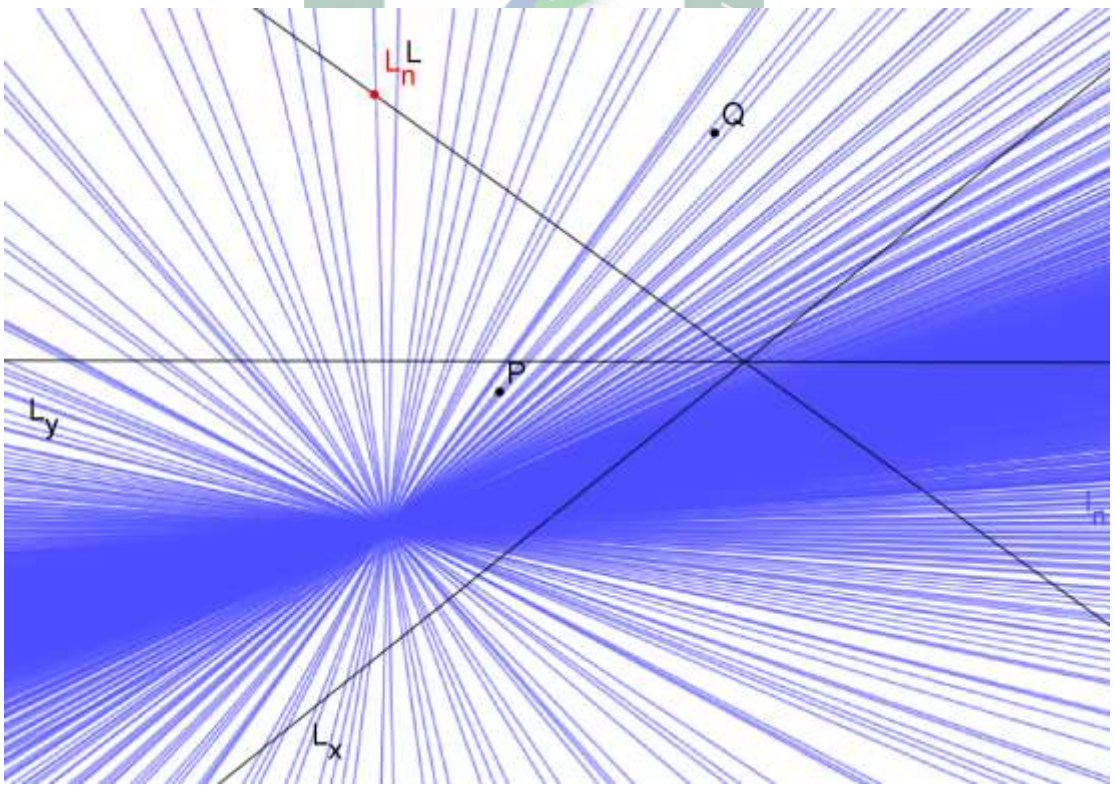


圖 5- 46 曲線變換圖 6

資料來源：研究者整理繪製

L_y在 L 及L_x的交點及 Q 點之間，再次形成橢圓

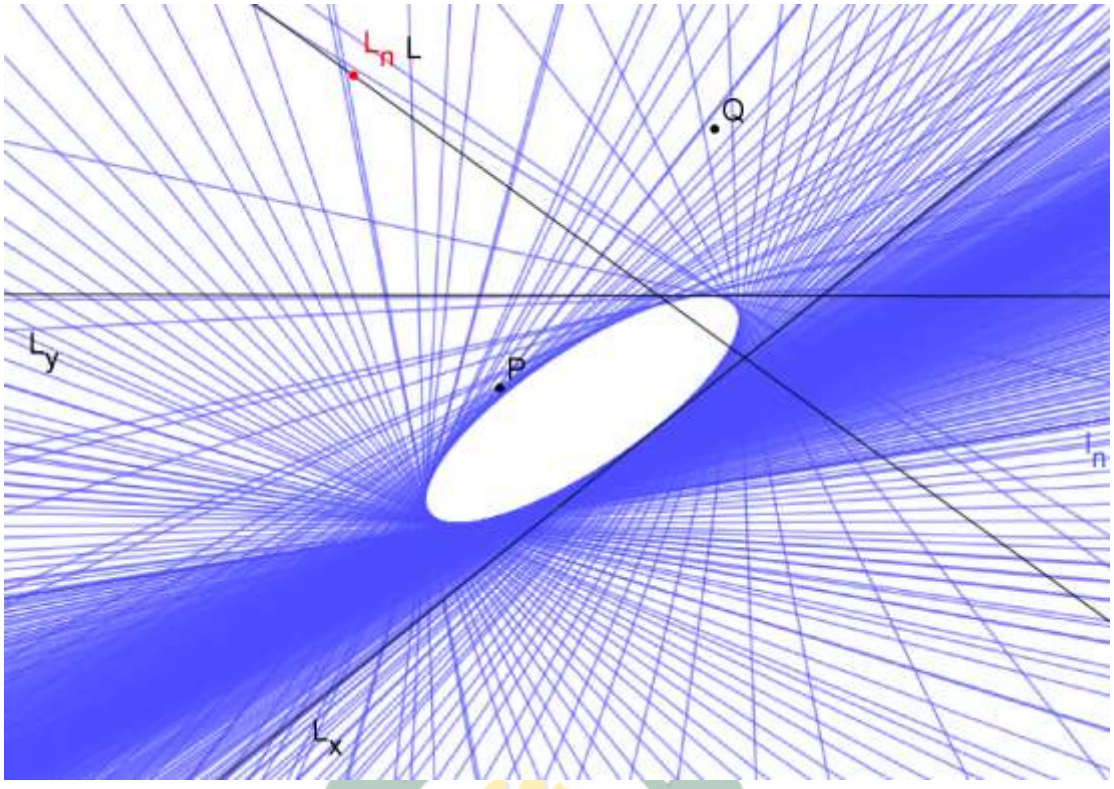


圖 5- 47 曲線變換圖 7

資料來源：研究者整理繪製

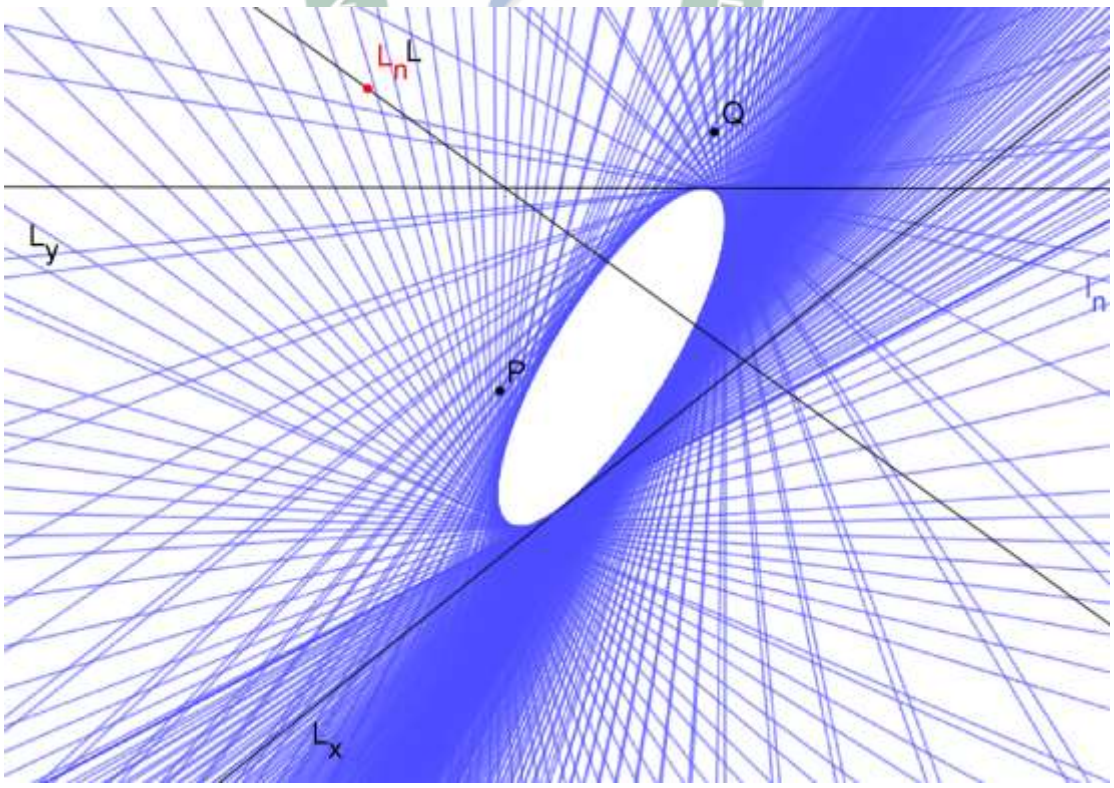


圖 5- 48 曲線變換圖 8

資料來源：研究者整理繪製

L_y過 Q 點，所有的直線l_n均過同一點 Q

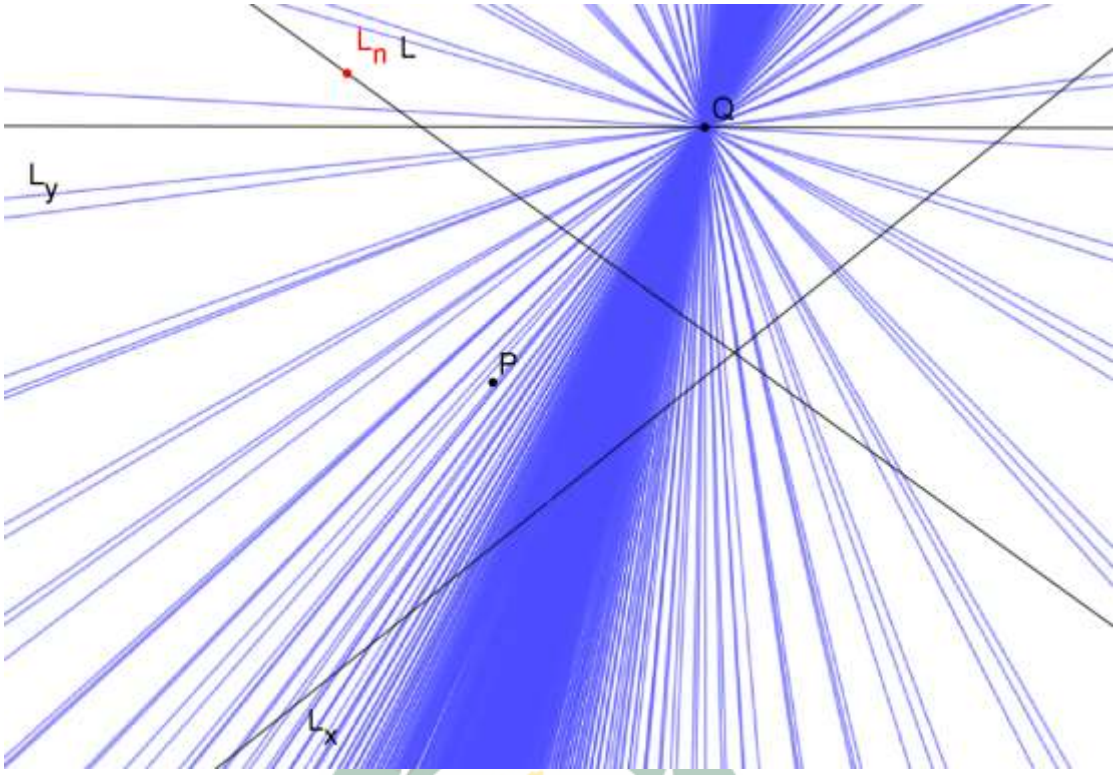


圖 5- 49 曲線變換圖 9

資料來源：研究者整理繪製

當L_y移動至 Q 點上方，再次形成雙曲線

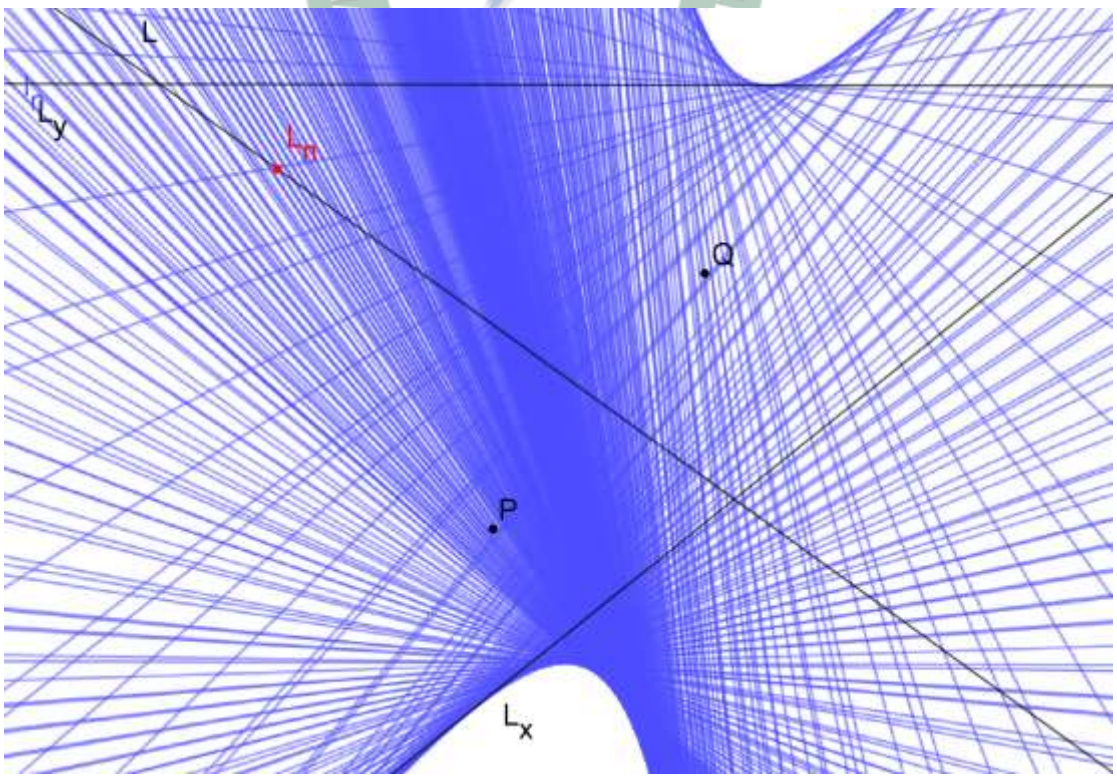


圖 5- 50 曲線變換圖 10

資料來源：研究者整理繪製

當L_y在無限遠處，才有機會形成拋物線，又再一次的呼應拋物線是在特定時刻出現的關係，不僅讓圖形的變換出現了連續性，也是另一種形式的整體性，一個個驚奇的關係、一個個驚奇的整體性，學生至此享受在幾何的奧秘之中，知道世界的奇妙，也相信著一定還有很多的關係值得探尋，而要探尋出那些美妙的關係，需要讓自己保有自由想像，無時無刻用心魂的力量去感知它，並且用理性作出嚴謹的邏輯推理。

拾貳、投影平面

解析幾何需要先建立互相垂直的 x 軸與 y 軸，再明確定出每一個點的絕對位置，而投影幾何平面，藉由三個消失點，創建了所謂投影幾何平面，如圖 5-51：

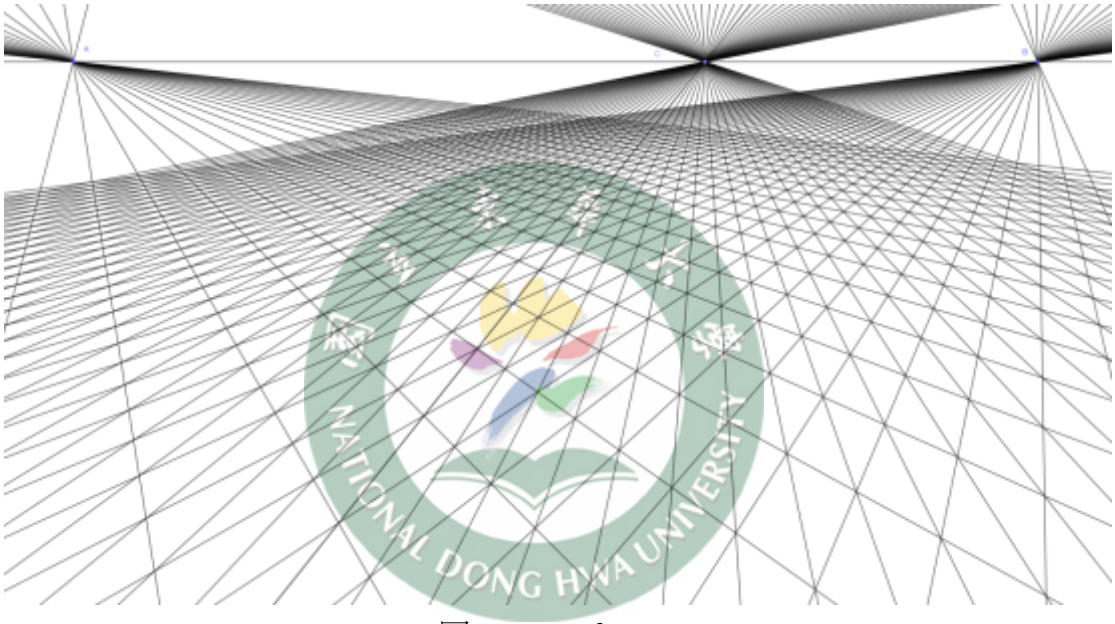


圖 5- 51 Mobius Net

資料來源：研究者整理自 Peter Baum etc（2014: 100）繪製

在投影平面中，並沒有「長度與角度」的概念，為了對應直角坐標平面，我們視圖中的每一個線段為「一單位」，藉由此平面，進一步重現圓錐曲線

一、根據橢圓的定義：動點 P 到兩焦點F_1、F_2的距離和成定值。

在笛卡爾的平面中，圓與橢圓均是一個封閉的圖形，根據相同的方式在投影平面中作圖，當橢圓不斷的放大，似乎出現了雙曲線（如圖 5-53），但當我們用另一種角度看待，橢圓只是從上方翻轉，它還是一個「封閉」的圖形，因為它與無限遠線並無相交的情況發生，這是因為我們透過投影平面將無限遠線畫在可見的視線下所產生的錯覺。

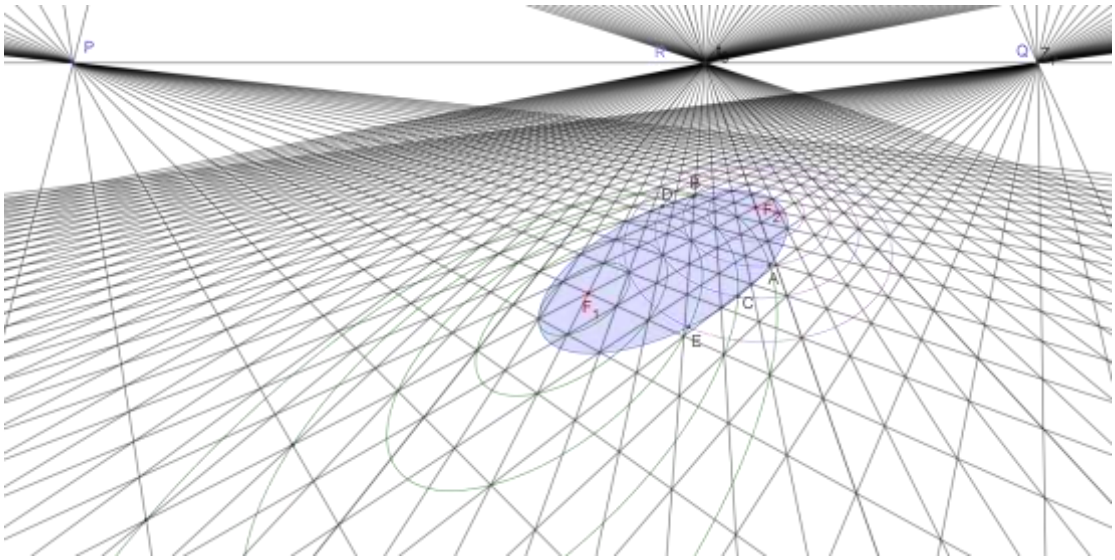


圖 5- 52 投影平面—橢圓 1
資料來源：研究者整理繪製

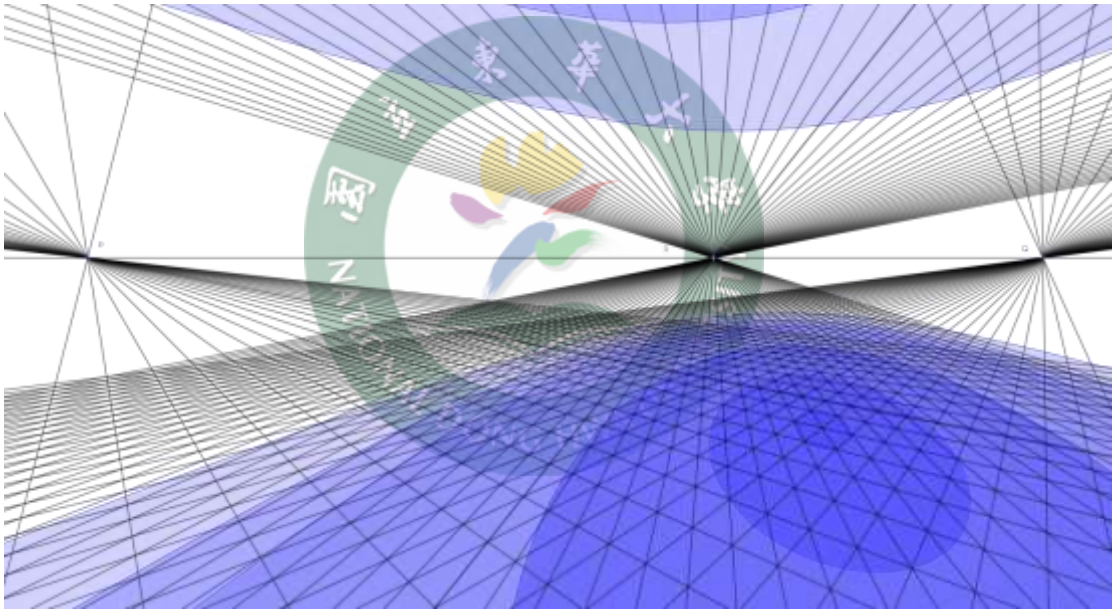


圖 5- 53 投影平面—橢圓 2
資料來源：研究者整理繪製

二、 根據拋物線的定義：動點 P 到準線 L 及到焦點 F 的距離相等。

如圖 5-54，在直角座標中，以 x 軸為準線 L，焦點 $F(0，2)$所形成的拋物線圖形。在 y 軸兩邊的曲線不斷往兩邊延伸，當他們到達無限遠，是出現什麼樣的情況呢？

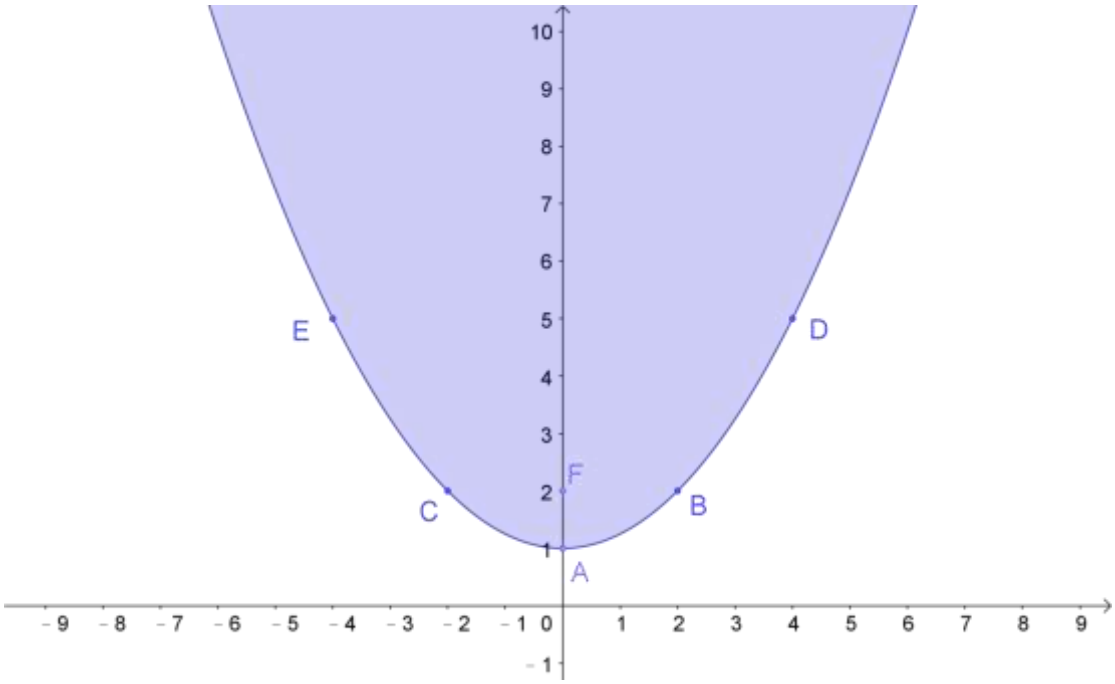


圖 5- 54 拋物線定義

資料來源：研究者整理繪製

投影平面中的拋物線

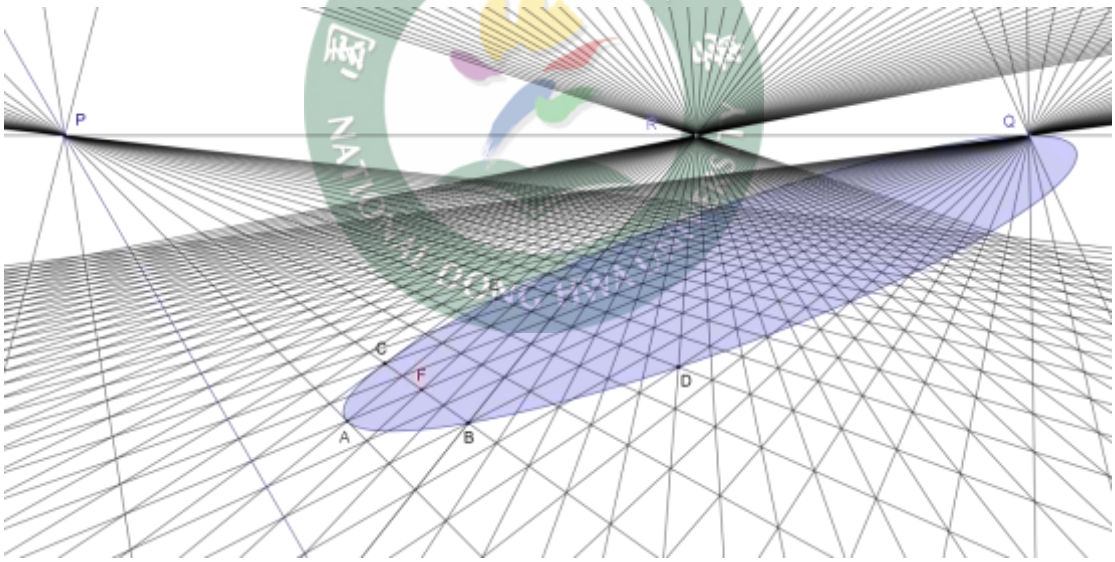


圖 5- 55 投影平面—拋物線 1

資料來源：研究者整理繪製

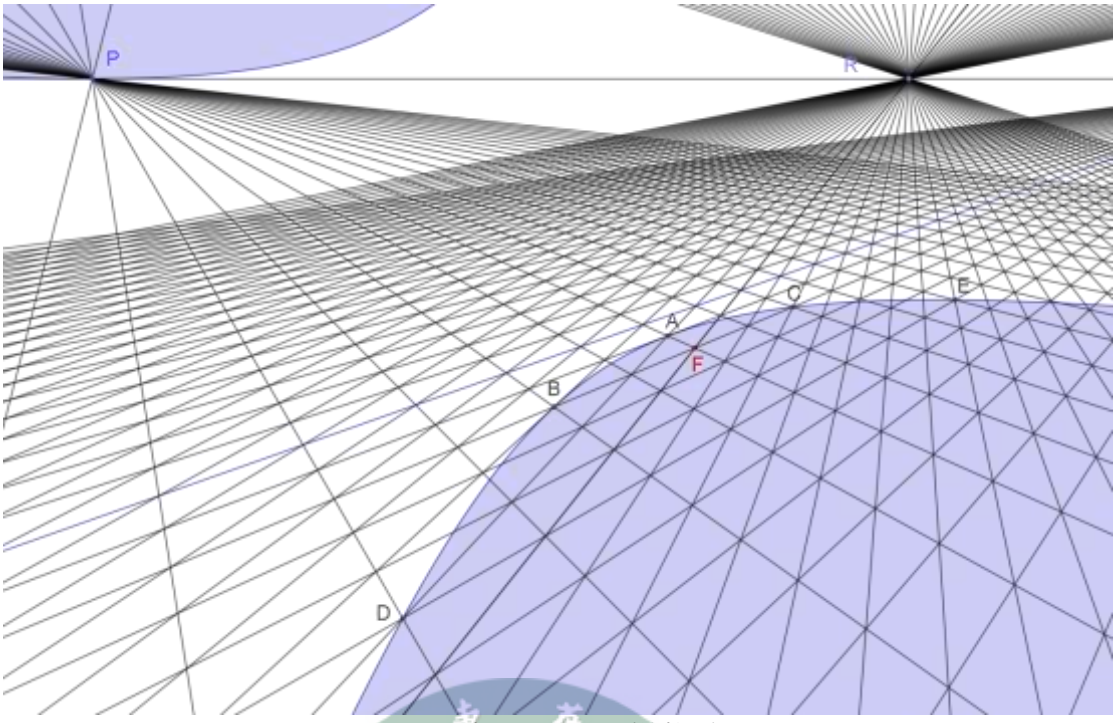


圖 5- 56 投影平面—拋物線 2

資料來源：研究者整理繪製

我們的視覺會告訴我們，上面的第一張圖中，圖形似乎為橢圓，讓我們更仔細觀察，並帶進思考，可以看見圖形與三個消失點共線的無限遠線是相切的；第二張圖看似為雙曲線，同樣的也與無限遠線相切，兩個圖形有一個共同的現象，都與無限遠線只有一個交點。換句話說：原本往無限延伸的拋物線兩端點，在無限遠線的消失點處交會了。

三、根據雙曲線的定義：動點 P 到兩焦點F_1、F_2的距離差成定值。

圖形的呈現同一般平面上的雙曲線樣貌。我們關注另外一個現象：雙曲線與無限遠線相交於兩點。

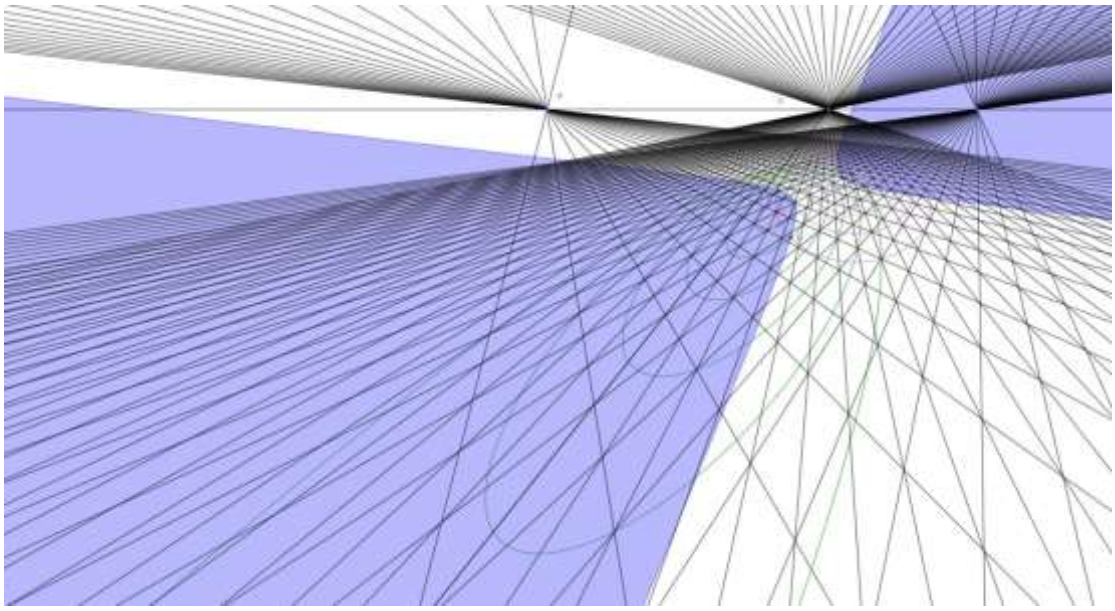


圖 5- 57 投影平面—雙曲線
資料來源：研究者整理繪製

當我們用投影平面重新看待橢圓、拋物線與雙曲線，完全呼應上述另一角度看待圓錐曲線的情況，當加進了圖形與無限遠線的關係時，橢圓、拋物線、雙曲線分別與無限遠線相交於 0、1、2 個點，將看待圓錐曲線的角度從有限拓展至無限，用一種全觀的視角重新面對，不僅圖形可視為相同，也可得出一種有次序的美，打破了所謂「封閉」的概念，視每一種圖形不分彼此，你就是我，我也就是你，都是一樣的。關於投影平面內容，因為已比較抽象且艱深，不一定會在課堂中提出，當作是老師自我放在心中的補充教材。原來還有比無限遠更遠的世界存在，永遠值得我們持續探索。

拾叁、課後延伸補充

一、莫比烏斯環（Mobius Strip）

1. 製作莫比烏斯環（參照圖 3-7）

(1) 用筆在環的中間處畫橫線，讓學生們看見其特殊之處，提問「若沿線剪開，會發生什麼事」，先猜測，再讓大家動手剪開。
(2) 用剪刀沿中間線剪開。
(3) 用筆在 1/3 處畫橫線，先思考畫完之後會如何呈現在環上，再實際操作。
(4) 用剪刀沿 1/3 處剪開。
(5) 純頭腦思考：用筆在 1/*n* 處畫橫線，會出現怎樣的可能性，剪開之後呢？

2. 製作鏡像的莫比烏斯環

(1) 先製作兩個圓形的環，成 90 度交錯黏貼，從中間剪開，先思考形狀，再實際剪。

(2) 將兩個鏡像的莫比烏斯環成 90 度交錯黏貼，從中間剪開，先思考形狀，再實際剪。

3. 延續與開展

(1) 還可以怎麼玩？
(2) 莫比烏斯環有現實的應用嗎？
(3) 還有哪些延續的思考觀點或作品？

二、六錐反演體

若說莫比烏斯環是曲面上的內外翻轉，1929 年保羅·沙茨（Paul Schatz 1898-1979）從正方體中擷取出的「六錐反演體」（圖 5-58）則是在立體層次上內外翻轉的經典例子。將正方體依照圖 5-58 的方式，切下對稱的兩塊白色體積，保留斜線部分的體積，形成由六塊全等三角錐所組成的形體，暫稱其為「六錐反演體」。



圖 5- 58 六錐反演體製作

資料來源：研究者整理自 https://www.youtube.com/watch?v=FAwrMtkJK4g 繪製

「六錐反演體」可以做自身的翻轉



圖 5- 59 六錐反演體

資料來源：研究者整理自 https://www.youtube.com/watch?v=FAwrMtkJK4g 繪製

為了方便看出旋轉時的變化情形，用相同的顏色的圓點標示同一面的狀態，從這 12 張連續的圖中，仔細觀察橘色點的面，一開始可以看出在「外」面，慢慢的往「內」轉到裡面，整個「六錐反演體」做了一次內外翻轉。

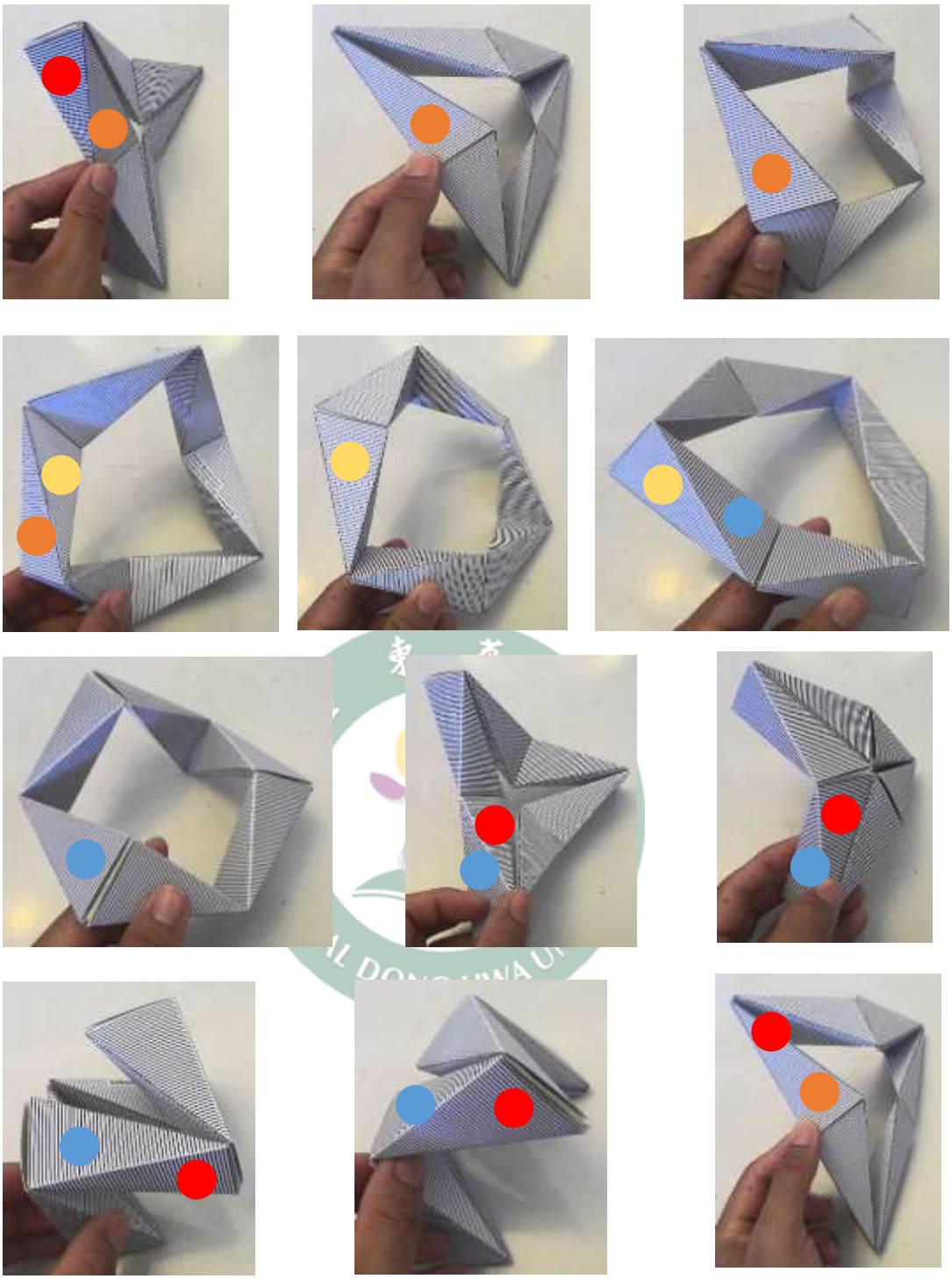


圖 5- 60 六錐反演體內外翻轉

資料來源：研究者整理自 https://www.youtube.com/watch?v=FAwrMtkJK4g 繪製

參、Oloid 結合六錐反演體

若將構造出「六錐反演體」的原始正方體邊長視為 r，則正方體的對角線長為 $\sqrt{3}r$，如果固定對角線的頂點，當六錐反演體翻轉時，這兩點的長度是不會改變的，會一直維持$\sqrt{3}r$的長度（圖 5-61）。將六錐反演體黏貼在兩圓（半徑為 r）垂直黏貼的板模上，也就是形塑出 Oloid 的兩圓板模。注意圖 5-61 的橘色線段，當

六錐反演體沿著板模開始翻轉時，橘色線段也正在形塑出 Oloid 的表面，下方的連續 12 張圖，是六錐反演體翻轉時的軌跡呈現。很神奇的，六錐反演體不僅僅有內外翻轉這個特性，而且跟 Oloid 有著相同的秘密。

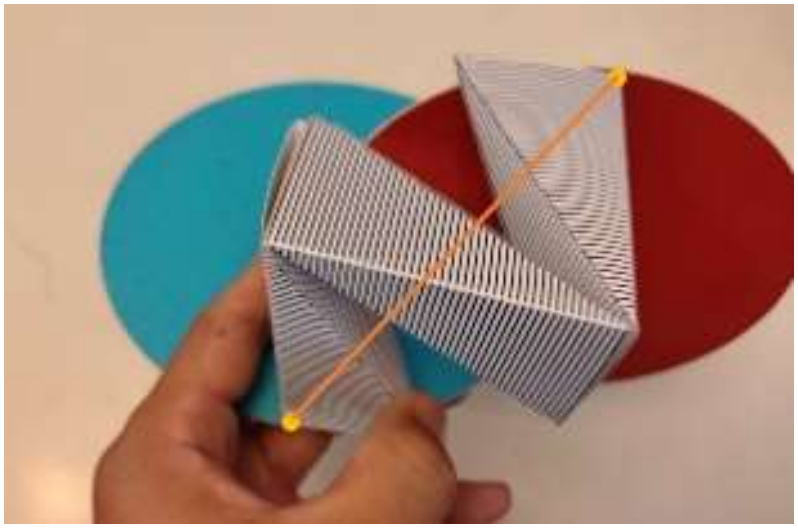


圖 5- 61 六錐反演體與 Oloid

資料來源：研究者整理自 https://www.youtube.com/watch?v=FAwrMtkJK4g 繪製

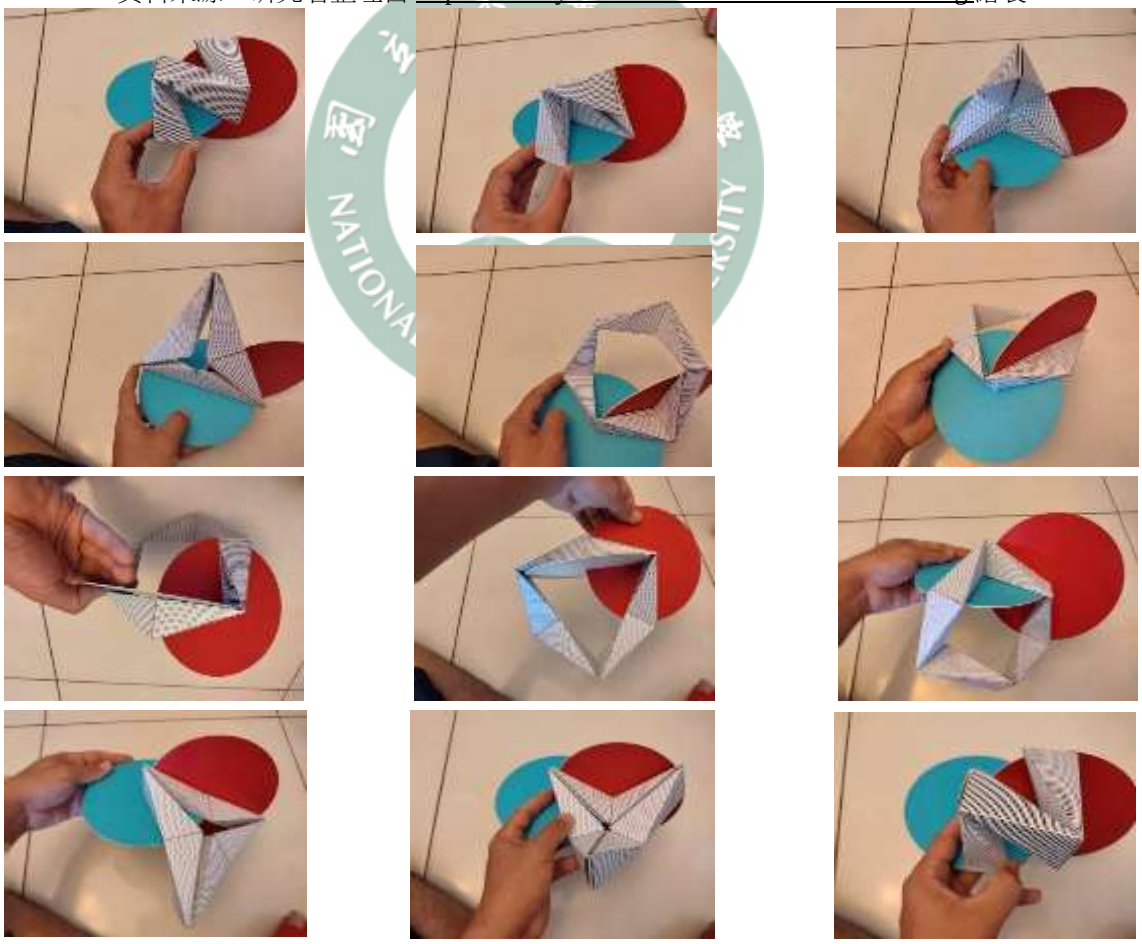


圖 5- 62 六錐反演體形塑 Oloid

資料來源：研究者整理自 https://www.youtube.com/watch?v=FAwrMtkJK4g 繪製

有關六錐反演體已被運用在太空的飛行器，Oloid 也證實在增加水裡含氧量時

是最節能的設計，而這些都可以拓展學生的視野，也同時讓學生們知道，很多的研究總在因興趣而嘗試了解，卻總是在不經意之處找到相關的應用，一開始並不一定是為了哪一種目的而做。整個課程至此，尚有很多的延伸空間，可以讓學生對世界充滿好奇，保有對世界的崇敬，不會以現有的知識而滿足，可以更謙卑的終身學習，來更認識世界，更了解自己。

第三節 教學方法

本節分為教學模式、課程節奏、課堂互動三個部分做說明

壹、教學模式

一般教學現場最根源的兩種教學模式是「講述法」及「討論法」，以國中三年級教授三角形的外心為例：

一、講述法

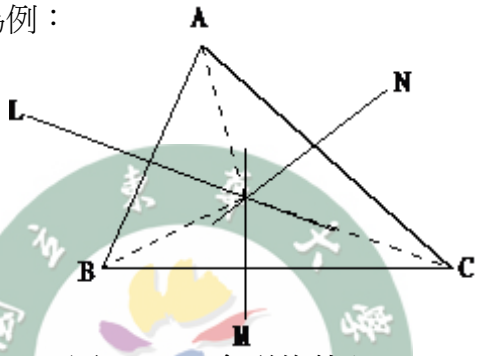


圖 5- 63 三角形的外心

資料來源：研究者整理繪製

圖 5-63 中，先介紹外心，給出定義：任一個三角形 *ABC*，任兩邊中垂線交於一點 *O*，*O* 點為三角形的外心，接著證明第三邊的中垂線也會過 *O* 點，且 *O* 點到三個頂點等距離，並說明外心的性質：

1. 銳角三角形：外心在三角形內部；
2. 直角三角形：外心在三角形斜邊中點；
3. 鈍角三角形：外心在三角形外部。

先介紹定義，然後推導公式，再進行題型練習，由老師教授此單元的特性，嘗試與其他單元做連結，找出關係，是以老師為主、學生精熟相關概念為目標的教學模式。

二、討論法

全班學生各自畫一個自己獨特的三角形，並畫出此三角形的三邊中垂線，每個學生從中觀察全班所有人繪製圖形的共同特性，以自己舊有對該單元的理解進行推理、思辨，再統整全班同學的發現，判斷出精要的概念，接著定義出每一個概念的名稱。

投影幾何注重思考立基點的起因，期待學習者本身透過自己的邏輯推理；欣賞他人的邏輯分析，得到屬於自己最深刻的概念。在完成每一個新定理的作圖過程中，只要依照幾個簡單的規則，其餘的部分都讓學生自由發揮，產生出全班都看似不同，屬於自己的獨特圖形，再從中觀察所有圖形的共同特性。關於學生自由發揮的部分在研究者去年的教學紀錄中有一段與自己的深刻對話值得分享：「所有定理以更『自由』的方式給予，在黑板呈現交不到點的可能共同特性，更能讓學生掌握住遠方似乎會有特殊情況的可能性，當學生的作圖在紙上無交點，鼓勵他開始思考並願意面對，只有透過腦中清晰的思辨才能有效理解無限遠發生的關係。老師上課時的內在自由，似乎影響了學生在過程中的自由」。過去的教學，總會希望學生看見定理的特別之處，所以會刻意把關係呈現在黑板上，但內心自由的狀態下，看似隨意畫在黑板上的關係反而激發出學生的想像空間。因為投影幾何思考的立基點與歐氏幾何不同，在課程一開始，會先請學生列舉學過的數學內容，並將之一一羅列在黑板上，最後請他們試著將這些知識放在一旁，盡量試著與新的內容作第一次的相遇，同時也邀請自認數學不好；在學習過程中有挫敗經驗的學生能用另一種態度進入投影幾何的領域，當學生願意表達自己的想法時，用肯定的方式進行討論，引導學生可以多說一點，不為他們提出的觀點作判斷，只是透過不斷的提問讓學生思辨腦中尚未清晰的觀點，從提問中幫助學生更能掌握所有的概念。

貳、課程節奏

華德福學校的特色之一是「主題課程」（main lesson）的設計，一個主題進行三或四週，每天約 120 分鐘，讓學生在同一時期能深度沉浸在相同主題的氛圍之中，每天的課程節奏（表 5-3）從美感體驗（內容如表 5-4）開始，藉此喚醒尚處於沉睡中的學生，讓學生盡快進入上課的氛圍，同時也為後續課程做準備，看似無關的圖形，會在課程的最後階段一併探討關係，是一種整體關係的鋪陳，讓課程中的每一個圖形都是息息相關；華德福學校強調經過晚上的睡眠，讓潛意識在此時留下思考的痕跡，所以在美感體驗之後，進行前一天老師繪圖示範、自行作圖之後的概念回顧，全班一起分享討論，偶爾會視學生狀態、或內容的難易度先進行小組分享，讓學生重複在腦中經驗一次作圖的過程，發現隱含其中的特殊現象，為思緒進行整體性的概念回顧；給出一定的時間書寫屬於自己的工作本，再次自我沉澱所聽到的概念，為自己做出統整併留下記錄，在一天課程的時間安排上，此階段所佔的比例會越來越長，讓學生有更多的時間進行自我探索，能有更多自我對話的可能性。課程最後是老師的作圖示範，聆聽老師講述作圖規則，利用工具實作，在期待圖形出現的過程中，培養出願意精準作圖的態度，這一種態度不是來自老師的要求，而是學生自己會給自己的挑戰，同時也將預備給學生的新概念隱藏在圖形之中，留給學生們透過觀察自己與同學的圖形，自行發現新

奇之事的可能性。此課程計畫預計在三週，共 15 天的時間完成，最後留下延伸思考，讓有興趣的學生們可以自我精進。

表 5- 3 每日課程節奏

	時間	目的
美感體驗	15 分鐘	喚醒沉睡中的學生
概念回顧	30 分鐘	為前一天（含之前內容）課程做統整
工作本整理	20 分鐘	自我思辨、整理
繪圖示範	25 分鐘	掌握作圖規則
自行作圖	30 分鐘	獨力做出自己的判斷

資料來源：研究者整理

表 5- 4 美感體驗（第三週課程有大量作圖時間，取消美感體驗）

順序	時間	內容	目的
第 2 天	25 分鐘	畫一個圓，每 3 度畫一條直徑（學生可自由挑戰畫 1 或 2 度）	掌握精準度，看見精準度的美
第 3 天	10 分鐘	畫一個圓，畫出至少 20 條切線	為極性圖 2 做預備
第 4 天	15 分鐘	畫圓並 36 等分，n—n+10 連線	直接由線形塑出圓
第 5 天	15 分鐘	畫圓並 36 等分，n—2n 連線	直接由線形塑出心臟線 cardioid
第 6 天	15 分鐘	畫圓並 36 等分，n—3n 連線	直接由線形塑出 naphroid 腎臟線
第 7 天	15 分鐘	Mobius Net 三個消失點在同一線上	以透視技法看無限遠點
第 8 天	15 分鐘	Mobius Net 其中一個消失點在無線遠處	看見平行線在無限遠交於一點
第 9 天	15 分鐘	橢圓軌跡	直接由線形塑出橢圓（圖 5-64）
第 10 天	15 分鐘	雙曲線軌跡	直接由線形塑出雙曲線（圖 5-65）

資料來源：研究者整理

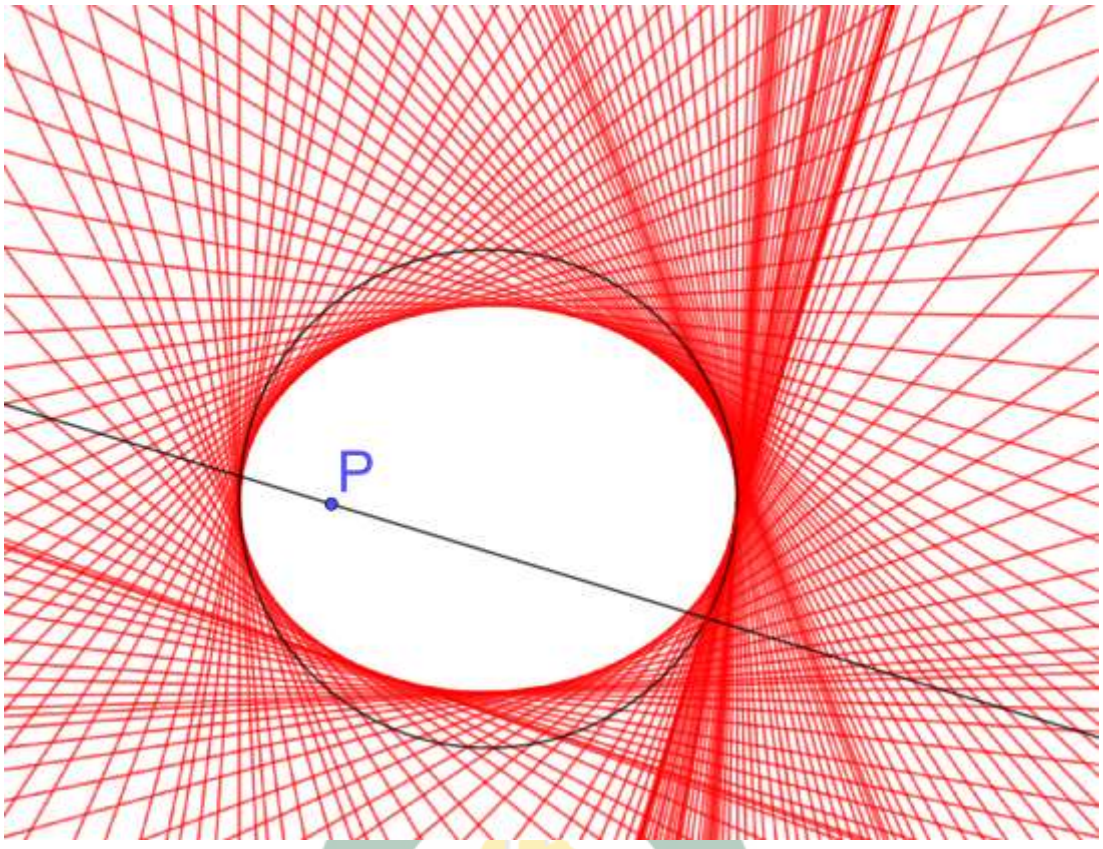


圖 5- 64 橢圓軌跡

資料來源：研究者整理繪製

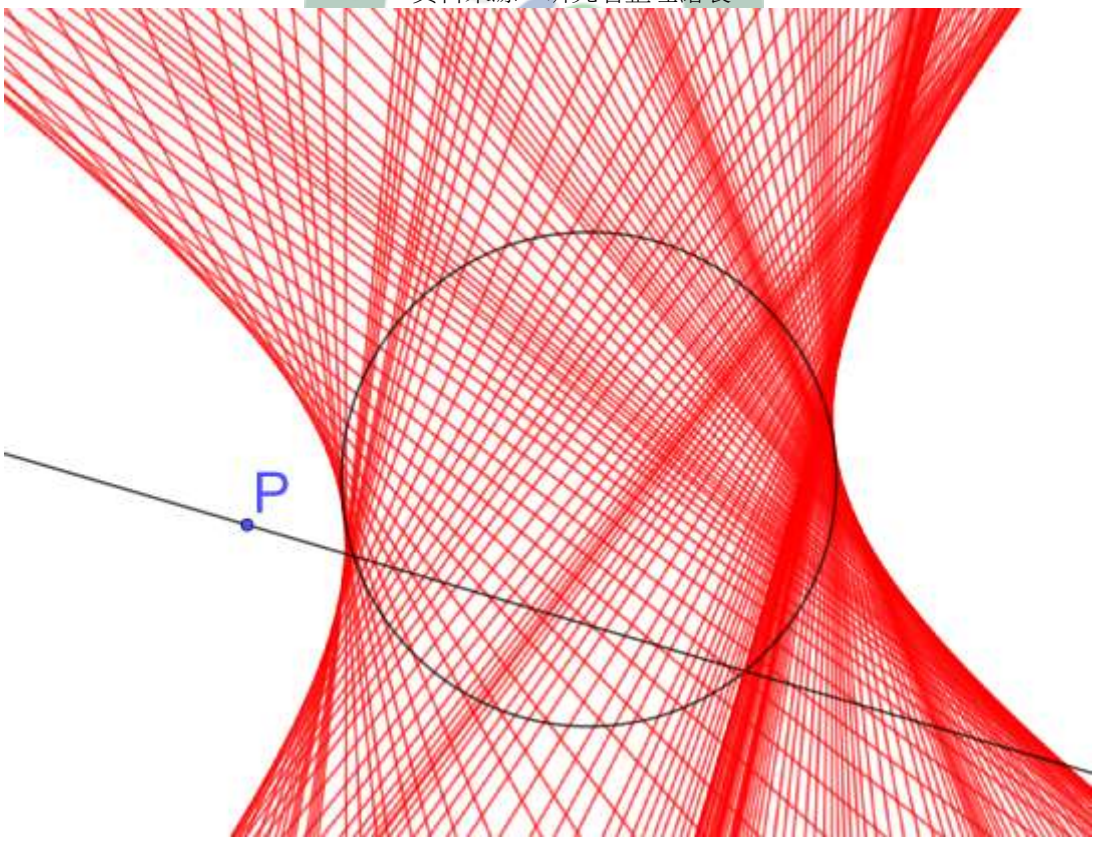


圖 5- 65 雙曲線軌跡

資料來源：研究者整理繪製

叁、課堂互動

投影幾何的課程需要手繪許多圖形，所有的圖分成兩大類：依作圖步驟完成圖形後觀察特性、重複作圖步驟得出深具美感的圖形，其中後者又可細分為重複簡單步驟即可完成的圖形，會放在美感體驗時繪製，複雜步驟才能完成的圖則是課程中後段在課堂及回家需完成的圖形。每一天的進度說明與課程回顧，是學生與老師互動最頻繁的時候，因兩大類的作圖在兩個時段的討論方式略有不同，故分別說明：

一、依步驟完成作圖並觀察特性：

每個作圖一開始，一定強調要很「自由」的先畫某條件在紙上，在每一步驟之間會有空白時間，讓學生猜測老師可能會做什麼，當老師在黑板上完成所有的步驟後，給出時間讓學生自行完成作圖。如果步驟是比較複雜的作圖，先請所有學生只是聆聽，老師全程畫一次之後，再帶著學生一步驟重新畫一次。學生自行作圖時，老師除了觀賞所有學生的圖形，更重要的是確認所有的學生都意識到如何作圖了。以下舉三個作圖為例：

1. 投影三角形：

(1) 在給出投影三角形之前，會先就三角形的名稱作定義上的確認，引導改從邊的概念來作判斷（後期提醒，同樣可以從角的概念看待）。
(2) 操作圖 5-1 簍空紙板投影，當光源在 A、B 時，提問投影出來的圖形為何？
(3) 當光源不斷往下移動時，提問投影出來的圖形為何？
(4) 當光源移動到 D（與簍空三角形頂點同高）時，提問投影出來的圖形為何？此時學生的各種答案都不直接給予對或錯的評斷，留給學生們討論、判斷。
(5) 最後提問光源持續下移的圖形可以怎麼稱呼，同樣讓學生們彼此討論判斷。
(6) 於隔天回顧的時間，一起畫出圖 5-1，討論作圖時的每一個細節，最後說明有一種看法是光源在 D 及 E 時都依然視為三邊形，以不出現例外的狀況看待每一個時刻。

2. 完全三邊形

(1) 在黑板上畫出圖 5-66，提問黑板中有幾個三邊形，不斷重複問有幾個，並說明原因，當有學生說出四個時，讓此概念形成全班的共識。

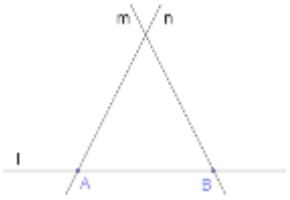


圖 5- 66 完全三邊形
資料來源：研究者整理繪製

(2) 過 B 的線 m 逆時針旋轉；過 A 的線 n 順時針旋轉，請學生畫出四個三邊形的變化關係

(3) 於隔天回顧時，讓學生說出整個變化的過程該注意的概念。

3. 帕普斯定理

(1) 將圖 5-3 的作圖步驟分階段給學生，一開始只給兩個步驟，讓學生自由作圖後觀察特殊性（視情況彼此欣賞、討論）

① 任畫兩線L_1、L_2，並在線上各取三點 A、B、C 及 A'、B'、C'三點

② 連 AB'、$A'B$、連 BC'、$B'C$、連 CA'、$C'A$

(2) 無聲的給出提示，只在黑板上將線 AB'、$A'B$ 塗上藍色、線 BC'、$B'C$ 塗上棕色、線 CA'、$C'A$ 塗上綠色

(3) 當有學生能自行發現藍色線、棕色線、綠色線的交點在同一條直線上後，讓學生自由走動欣賞每一個人的圖形，觀察是否都有相同的現象？

(4) 若藍色線、棕色線或綠色線得不到交點，怎麼辦？

(5) 隔天回顧時，引導學生講出作圖步驟的關鍵點，引發討論得不到交點時的解決方法，埋下伏筆討論帕普斯線的特殊情況。

此時教學上以提問為主，教學的重心放在感受平行線在無限遠有交點及對偶性的概念，直到完成「點、線的對偶關係」為止。

二、重複給定作圖步驟得出深具美感的圖形

以下面兩個例子做說明：

4. 由點的對偶線作出第一個極性圖，讓學生看見一個美麗的對偶關係。接下來先將原始圖形畫出切線，重複步驟作出切線的對偶點，可以做出各種圖形的極性圖，在這個時期，大量的時間是學生自行工作，因此必須先確保所有學生對點、線對偶關係掌握的程度，培養出檢驗每一次的對偶線或點都是正確的態度。藉由原始圖形的「連續性」討論超出紙張時的關係，並且深入探索無限遠時的特性，進而理解並讓極性圖得以「連續」；另外也討論用切線形塑的原始圖形，是一種轉換視角看待圖形的概念，引領學生看見圖 3-6 所傳達「內外翻轉」的概念。

5. 曲線變換作圖先繪製固定線 L、L_x及兩點 P、Q 位置的圖形，再影印給學生，將紙的長度依照全班人數作出等分的數量，每一條等分線視為L_y的位置，讓學生依座號，每人繪製一張L_y不同位置的曲線變換圖，經由點及直線的關係下完成作圖，當看見圖形漸漸成形的那一刻，會令人無比的讚嘆，震撼幾何世界的奇妙。雖然全班的圖都不一樣，但都與圓錐曲線有關，多數人會出現橢圓或雙曲線，此時將全班的圖貼在黑板上，看見所有時刻變化的連續性，並提問拋物

線在哪裡？讓學生猜測並討論可能的位置。最後用 Geogebra 繪圖軟體，以 97 張曲線變換圖看見圓錐曲線的變化關係，是一種不特別點破，卻可以深深埋在學生內心深處關於整體性的觀點。

課堂互動時，老師需要保持內在自由、開放，透過不斷的提問取代直接給出新概念，當學生存在疑惑時，仍然相信透過後續的課程可以引導他們進入投影幾何的世界，而不必急著給出新概念的答案，並鼓勵學生分享完成圖形時的內在感受，因為感知是思考的基礎，引導學生一步步往自由思考的路前進。

第四節 學習評量

在行動研究三輪六個班的教學後，重新整理出 11 個評量指標，並將六個班的學生綜合做出整體評量，重新進行分析。本小節先從課程的理念及目的談評量指標，再從評量指標的結果分析歷屆學生的狀態，確認課程實施的成效。

壹、評量指標

投影幾何課程著重四個理念：聽見內在真實聲音、自由判斷、批判性思考、美感教育，並且有下列五大目的：

一、運用基本的作圖工具—直尺、圓規；以幾何最基本的語言—點、線，盡己所能的依照規則創作出精準的圖形。

二、覺察自身的感受，理解無限的概念，並能分析各種圖形在無限遠時的關係。

三、從點、線兩種視角的轉換，練習數學思考的歷程，由此看見並欣賞對偶性的存在。

四、運用邏輯推理的方式，對幾何關係做出正確的判斷，進而掌握幾何概念的整體性。

五、從投影幾何的實例中，練習自由想像的數學思考，產生驚奇的美感經驗。

本節依據這四個理念及五大目的，試著透過評量從中檢視學生的學習表現與態度，在學習表現上細分為繪圖、無限、對偶、整體、步驟書寫及邏輯推理六個項目；學習態度細分為主動參與與美感中想像、驚奇感、自由感知、自由思考四個項目，整個課程的評量指標如表 5-5。同步確認老師的教學在每個環節上是否適當。五個課程目的並沒有一定的標準答案，老師需要在課堂的討論中細膩的聆聽與提問，保持開放性並營造出教室中可以暢所欲言，不用擔心被同學嘲笑的安全氛圍，讓學生願意將觀點及任何的想法寫進工作本，遇到課堂上不善表達意見及不擅長書寫的學生，主動利用課餘時間與學生討論相關主題，適度掌握學生的狀態，最後的心得回饋以課程內容評析為主，為整個課程做總結。無法用一般的紙筆測驗進行評量，主要從學生的工作本、心得回饋及老師的課堂觀察紀錄中，

檢視學生是否達到課程目的。不僅僅是對學生的整體學習表現與態度打成績，也讓教師自己知道如何更精進教學，可以在哪一個部分再加強，讓學生能更有感的學習。

目的一以學生繪製完成的圖形作為判斷依據，一開始的作圖可視為前測，後續的課程中會畫超過 30 張以上的圖，直到課程最後一個圖形繪製，可以判斷出學生進步的程度，是相對於其它目的容易作評量的判準，但每一個學生對精準度的掌握不一，如何激發出學生願意追求更精準一點的態度，如何讓想要達到「零誤差」的學生接受眼前的作品，都是平常跟學生一同討論及陪伴的重點。評量指標以「繪圖」為主。

目的二分為幾個時期做判斷，在前期並不以學生必須接受平行線會在無限遠有交點為判斷依據，讓學生存有疑惑感也是課堂安排的重點，只要能從定理中感受到可能性，甚至明確說出無法接受此觀點，都符合課程目的，主要是創造出有感的學習。在克卜勒螺旋槳單元結束時，要求書寫下對這個觀點的評析，作第一次對此觀點的深刻記錄，並在最後的課程內容評析中，請學生書寫出極性圖及曲線變換圖與無限遠概念的相關性，並依此作為判斷的依據，而課堂中回顧分享所討論的內容也是輔助評量的依據。評量指標以「無限」為主。

目的三從不同定理作圖開始，先感知到作圖過程中點、線的對應關係，並要求步驟書寫每一次都能比之前更清晰，讓學生自己發現點、線對偶關係的存在。接著利用對偶關係畫出極性圖，與無限遠點作結合產生圖形的連續性，將概念整理書寫進工作本，在課程內容評析中作整體的評論。評量指標以「對偶」為主。

目的四首先檢視每一個繪圖步驟的書寫，因為有其重要的先後順序，算是比較容易評量的指標。而整體這個項目有三個明顯的階段，首先是笛沙格定理中十點十線的繪圖及此觀點下整體脈絡的書寫，其次是加進無限遠點形成圖形的連續性及統合圓錐曲線的整體觀，最後是曲線變換圖形及投影平面呈現所有的定理，再一次給學生一個整體的觀點，這三個部分以學生在工作本及課程內容評析中確認學生的理解狀態，以及他們持哪一種角度賞析這樣的觀點。在所有定理間關係的一致性、無限遠點的推理過程、圖形從點改以線來形塑及三個整體性，如何有邏輯的書寫出整體脈絡，是這部分評量依據的重點。評量指標以「步驟書寫、整體、邏輯推理」為主。

目的五對應著指標中的主動參與及美感向度的想像、驚奇感、自由感知、自由思考等五個項目，但主動參與與美感的四個指標會同時在每一個目的中評析，目的五的達成，是要透過前四個目的一步步慢慢堆疊，無法單一完成。在「主動參與」方面，會從美感體驗的參與、繪圖、課堂分享與討論等方面進行評估；在「想像」的向度中，願意一次次面對自己的疑惑，保持開放的心胸持續有邏輯的

推論老師提出的觀點與自己的想法，從中得出屬於自己的結論，這部分將以課堂中的發言、紀錄及工作本觀點書寫為評量依據；「驚奇感」從學生作圖的過程中到圖形接近完成的驚奇感可先窺知其一，積極投入參與作圖是最直接的反應，工作本對感受的抒發是另一個評量的依據，並在最後的課程內容評析中作綜合性的整體評量；「自由感知」允許學生產生任何的情感連結，可以是喜歡、厭惡、好奇、煩躁、寧靜…等等的各種情緒，引導學生將任何的感受寫進工作本及心得回饋之中，並以課堂發言及書面紀錄為評量的依據；「自由思考」從學生對不同定理的作圖過程就開始評斷，確認學生是否可以慢慢跳脫老師黑板上的例子，在規則下以自己的方式呈現屬於自己的作圖，甚至願意挑戰各種不同圖形的變換，在每一個疑惑之處，提出自己的論點跟全班進行討論，或以書寫的方式記錄在工作本之中，為自己書寫最後的心得回饋。此處為學生埋下：「**儘管有著不確定的基礎，儘管數學家提出互相衝突的理論，數學為何卻依然不可思議的有效**」（趙學信；翁秉仁譯，2004：7）的思考觀點，並不點破要學生能夠接受，而是單純埋下一個種子，讓學生自由體會。

國立東華大學 NATIONAL DONG HWA UNIVERSITY

表 5- 5 課程評量指標

構面	項目	評量等級			評量依據
		A	B	C	
學習表現	繪圖	1. 美感體驗精準完成作品 2. 定理的作圖能精準達到三點共線及三線共點。 3. 極性圖繪製可以精準呈現完成圖。	1. 美感體驗大致完成作品 2. 定理作圖能大致看出三點共線及三線共點。 3. 極性圖繪製可大致呈現完成圖。	未達B	工作本
	無限	能對課程中討論的觀點真實陳述自己的想法，對圖形在無限遠處的關係能提出自己的想法。	能對部分課程中討論的觀點陳述自己的想法，理解無限遠點的存在。	未達B	
		以無限遠點的概念判讀圖形本身的連續性	理解無限遠點形成圖形的連續性		
	對偶	繪製對偶定理的圖形，書寫出清晰的對應作圖步驟	繪製對偶定理的圖形，僅能寫出作圖步驟。	未達B	
		從對偶關係判讀極性圖的連續性	理解極性圖連續性的存在		
	整體	1.對單元順序編排具備邏輯關係。 2.對笛沙格定理的十點十線提出完整記錄。 3.能畫圖呈現橢圓、拋物線及雙曲線為圓錐曲線的共同特性。	1.書寫出所有單元內容。 2.能寫出笛沙格定理十點十線的內容。 3.記錄橢圓、拋物線及雙曲線的特性。	未達B	
	步驟書寫	能以數學語言完整且清晰的書寫出作圖步驟。	能以自己的方式記錄作圖步驟。	未達B	
	邏輯推理	1.有邏輯的推理出紙張外的現象，以無限遠點的觀念分析圖形的連續性。 2.有邏輯的推理定理間關係的一致性。 3.有邏輯的推理點、線之間的對偶關係。	1.記錄紙張外的現象 2.記錄每個定理。 3.記錄點、線之間的對偶關係。	未達B	

學習態度	主動參與		1. 聆聽老師說明作圖規則後，能投入作圖或提出疑問。 2. 能對觀點提出疑惑，給予回應及分享。 3.妥善運用課堂時間完成作圖及概念分析記錄。	1.聆聽老師說明作圖規則。 2. 邀約後可以提出疑問或給出分享。 3. 課堂工作時間嘗試作圖及記錄。	未達B	工作本及課堂觀察紀錄
	美感	想像	1.當圖形超出紙張時，主動想像可能的關係。 2.對無限遠持開放討論的態度。 3.參與冥想，說出感受及文字記錄。	1.當圖形超出紙張時，被動等待答案。 2.直接否定無限遠的存在，卻無法提出論點。 3.參與冥想，能簡單說出感受。	未達B	
		驚奇感	1.享受作圖過程及結果所帶來的驚奇感。 2.欣賞圖形間的奇妙關係。	參與作圖過程。	未達B	
		自由感知	覺察自己在各種圖形及新觀點所產生的情感，能自由述說或書寫記錄。	僅能說出接受或不接受新觀點。	未達B	
		自由思考	1.符合作圖規則，所繪之圖與老師的示範相似度低。 2.分析作圖過程所產生的疑惑，持續探索各種可能的推理。 3.能自由選擇不同幾何觀的立基點進行思考。	1.符合作圖規則，所繪之圖與老師的示範相似度高。 2.僅能提出疑惑之處。 3.知道不同幾何有立基點的差異性。	未達B	

資料來源：研究者自行整理

貳、評量分析

依據二個構面、十一個項目的評量指標，將分數區分為三個等級，分別是 80 分以上為 A 等級、60-80 分為 B 等級，未滿 60 分為 C 等級，因為這六個班是在此研究之前所教，工作本已發還給學生，只掃描部分同學的工作本，主要的評量依據有三個部分，每次三周課程結束後都會要求學生寫一篇有關整個課程內容的心

得回饋，而這部分都有拍照存檔，是此研究的重要資料來源；其二是期末給每個學生的質性評量；最後是學年度的期末量化數字成績，其中課堂參與占比 45%、工作本占比 45%，課程結束後的心得回饋占比 10%。而 111 學年 A 班是在疫情期間進行線上課程，整體狀況明顯比實體授課的班級狀態差異較大，故排除在統計之內，百分比計算為 107、108、111 學年各一個班、110 學年兩個班中，五個班共 131 人，分布在各等級人數除以總人數的百分比，小數點後四捨五入。以下對十一個項目的評量指標進行分析：

一、繪圖：A 等級 95%、B 等級 3%、C 等級 2%。

此項指標有三個評量重點，首先是美感體驗，在完成作圖步驟後，能清楚呈現其形狀，如圖 5-67；定理的繪製，能精準達到共線、共點的情況，如圖 5-68，其笛沙格定理中的笛沙格線精準無誤的通過紅色、綠色與藍色線的交點，以上兩個圖都是 A 等級的例子。在定理的繪製中，能接受些許的誤差，除非是很明顯的偏離太多，才會落入 B 等級。而極性圖的 A 等級範例如圖 5-69，可以清楚的觀察出圖形的連續狀況，從原始形狀，準確的對應到極性圖中，有時略為偏離是有可能的，只要不影響觀察連續的情況，都會列入 A 等級之中。若圖形因為點的位置錯誤，影響到觀察整體的連續性，無法判定圖形的可能形狀，會歸類在 B 等級。

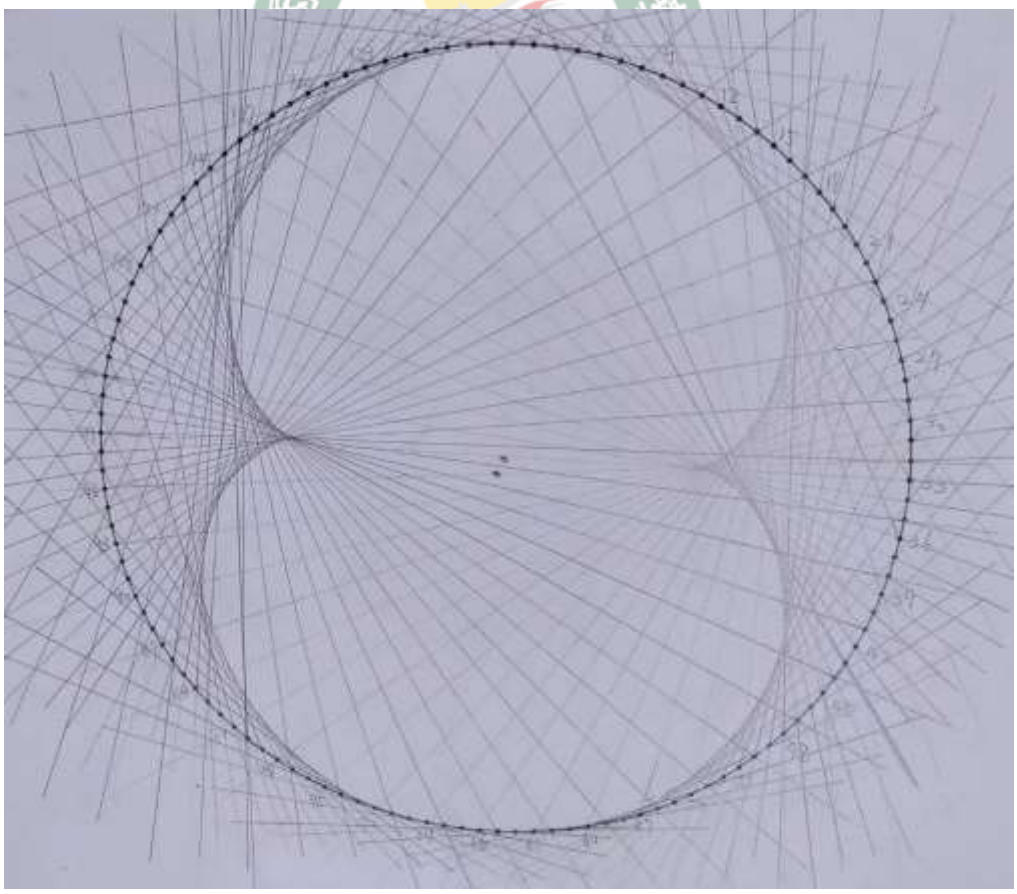


圖 5- 67 腎臟線

資料來源：工 107-6

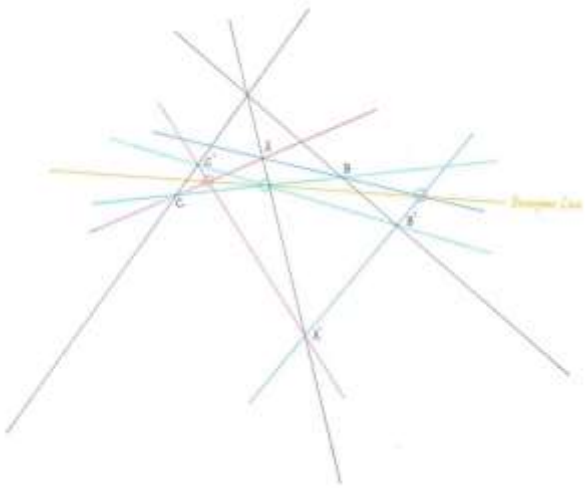


圖 5- 68 定理繪圖
資料來源：工-108-9

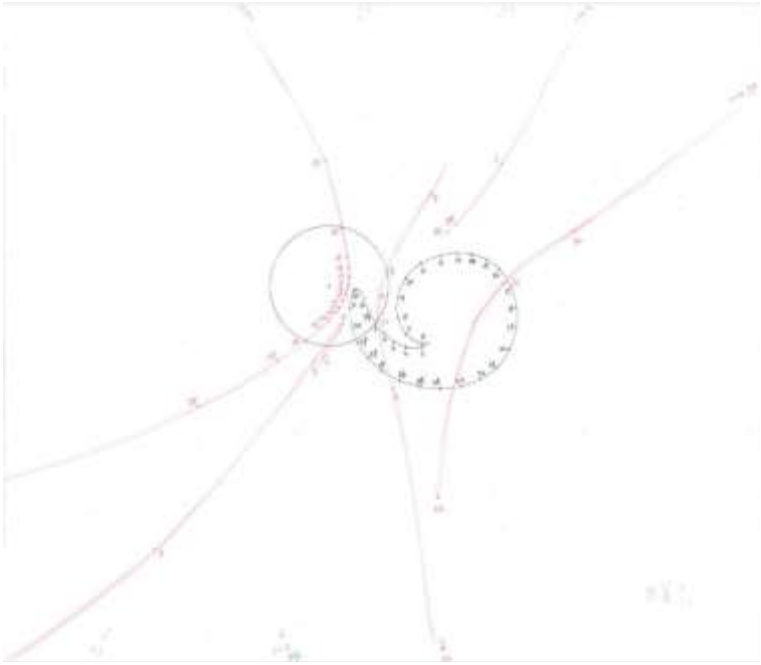


圖 5- 69 極性圖繪製
資料來源：工-108-9

這項指標大部分學生在一開始的課程中表現就算相當不錯了，可能原因與華德福課程注重幾何有關，從小學一年級就有形線畫，每年都有幾何相關的主題課程，從六年級的尺規幾何、七年級的透視、八年級的圓錐曲線、九年級的三角與圓、十年級的畫法幾何都需要利用直尺與圓規來作圖，為學生奠下良好的作圖習慣，在這一個指標中幾乎是從一開始大部分學生都能進入良好的作圖狀態，只有少數三個學生有學習態度上的問題，本身對學習並不是太熱中，直接被歸在 C 等級。A 等級的學生有兩大族群，一種是會在剛開始的時候覺得作圖很麻煩，主要是因為重複性太高，所以感到厭惡，但慢慢的，或被圖形的美吸引，或因為可以在作圖過程中得到寧靜，而漸漸地愛上作圖；另一種是本身對幾何有熱情，加上

線條所構成的圖形太過吸引人，在一開始就能精準地作圖，完全不需要老師做任何的要求，這兩類人的共通特質是自身都很擅長使用工具製圖且畫工精細、有耐心。而其他 A 等級的學生默默地跟隨老師指令畫圖，也能完成相當不錯的作品。至於 B 等級的 4 位學生，在美感體驗與定理作圖也都可以精準完成，但對於極性圖的繪製，就出現比較大的誤差，導致無法觀察出圖形間的連續關係。

二、無限：A 等級 92%、B 等級 6%、C 等級 2%。

關於無限關係的首次深入探討，是在課程第一週的克卜勒定理，當時已經有學生可以達到 A 等級的標準，能以圖形搭配清晰的文字說明，如圖 5-70，若學生

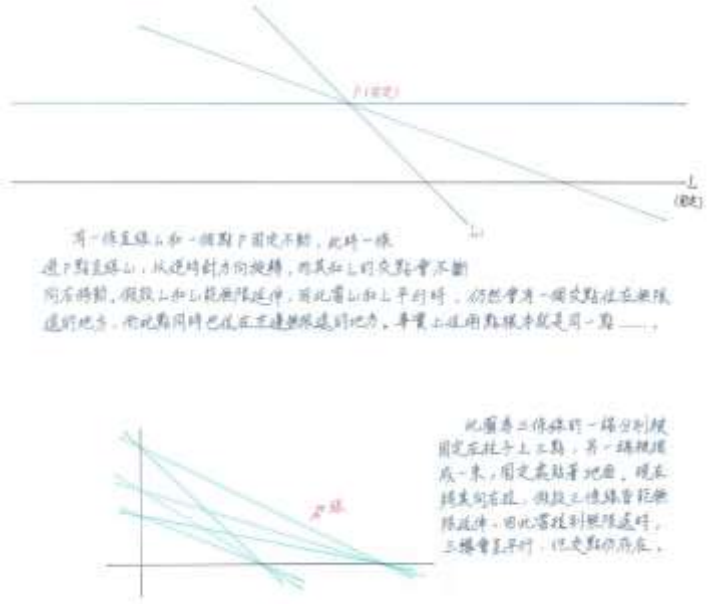


圖 5- 70 平行關係說明

資料來源：工-108-9

在繪製圖形的過程中偶有出錯，透過觀念的澄清之後，能理解其中關係，知道錯誤出現在何處，還是會給其 A 等級的標準。在因為無限遠概念而令圖形呈連續的判讀上，如圖 5-69，透過數字能有清晰的標示，算是 A 等級的好作品，整體評估標準只要在最後的圖形之前能繪製好圖形，並搭配文字說明，或是在心得回饋中能做出分享，就會給予 A 等級。若只是複製老師繪製的圖形，極性圖的連續性無法閱讀，且無文字說明，會給予 B 等級。

幾乎所有的人都在初次接觸無限遠點的概念時，都產生極大的困惑，無法接受這樣的觀點，主要原因是因為跟過往的學習有牴觸，學生在歐氏幾何的觀點中學習約十年，平行線沒有交點的概念早已深根柢固的建立在學生們的腦海之中，在學習無限的概念時，不論哪一個等級的學生，整體狀態可以分成三種類型，其一是至課程結束都還是不能接受無限遠點的概念，更不用談無限遠線的概念了，但特別的是，抱有這樣想法的學生在課程之中，並不厭惡這樣的說法，也沒有特別的無法進入學習之流，反而是在課程中形成一股討論的氛圍，不斷挑戰老師的

說法，是課堂中不可或缺的重要影響力。其二是雖然一開始不能接受，但經由老師的說明後就能接受了，關於這類型的學生又可以細分成兩種，一種是在老師的權威中，相信老師不會騙人，直接將此概念植入自己的腦海內，通常這一類型的學生在課堂上都比較少發表自己的想法，總是全盤接受來自老師的教學，並不是這堂課樂見的，也是老師最需要額外多花心思的學生；另一種是經由自己大量思辨，在數理學習上相對靈活且自由的學生，通常能快速掌握住老師教學的重點，但也並不一定就顯得比下一種類型的學生更能踏實且充分理解、品味到概念的本質。最後一種類型是從一開始的不能接受，慢慢的在一次又一次各種不同定理的衝擊下，在課程的後段似乎能接受了，這一類型的學生，幾乎都會產生不同於課程內容之外的連結，諸如學生在心得回饋中提到：「思考變廣闊了，世界同時也變大了」（心-108-2）、「學習最快樂的部分，莫過於『抱著疑問而來；帶著答案而去』」（心-111B-7）、「在宇宙空間之外，在我心深處」（心-110A-5）。後面兩種類型的學生都能充分掌握無限遠的概念，對於推理出圖形本身的連續性是一種享受，從疑惑中轉變為被新觀點所吸引，是課堂中引發思考的一群人。

三、對偶：A 等級 92%、B 等級 8%、C 等級 0%。

對偶的性質並不難被學生發現，通常在第一次提及（帕普斯對偶定理），同一時間在黑板上演示兩個對應的圖形時，幾乎是每一個學生都能感受到對偶性質的存在，也都能將圖形清晰的畫出來，在第二次時（笛沙格對偶定理）已能請學生上台與老師共同演示，到了第三次時（巴斯卡對偶定理）甚至不用老師提起，學生已能自行推得對偶性質的存在，此時同步要求清晰的將作圖步驟對應整齊，如圖 5-71，才會給予 A 等級。若僅有圖形的繪製，未寫步驟或步驟書寫看不出對偶關係的存在就會是 B 等級。當課程進入利用點、線互換繪製極性圖時，因為對偶關係是在繪製圖形的過程中，從點對應到線，再從線對應到點，形成一種點對點的對應關係，其中第一階段的點對應到線，形成於學生的內在，圖形只會呈現最後點的位置所在，所以評量標準是從最後極性圖的正確與否來判斷，如同圖 5-69，有清楚的對應關係，或能透過判斷，找出錯誤位置的點，都會是 A 等級。圖形繪製錯誤，且經由提醒仍無法確認錯誤位置的點，則會是 B 等級。

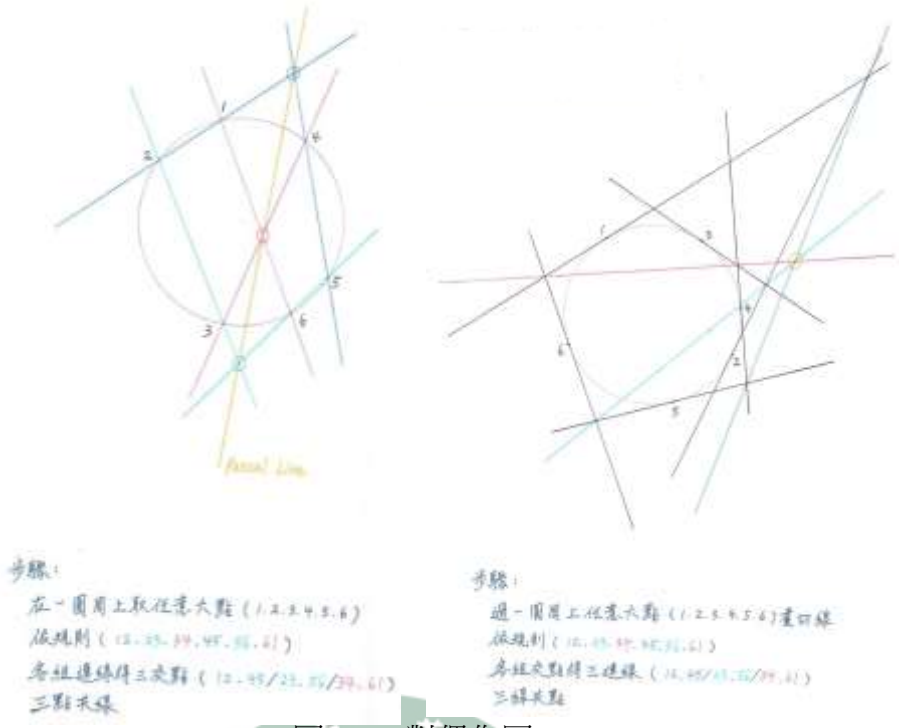


圖 5- 71 對偶作圖

資料來源：工-108-9

並沒有很多人直接在最後的心得回饋中以「對偶」的字眼提出來，而是以改變對圖形的認知，如：圓的內外翻轉，圖形是由點還是由線所構成。比較多人是以點、線互換的神奇或對繪製極性圖的強烈感受來抒發。能靈活且自由推理的學生中，尤其投入在從對偶關係中畫出極性圖，喜歡上因為有無限遠點的存在，才能令圖形的連續性出現，能理解這並不違背過往的經驗，只是從另一種觀點來看待。甚至有人提到「**應該是將視野轉向世界的時候了**」（心-110B-13），這是一種看待事物轉換視角的重要性，願意為此作出屬於自己的思辨。藉由對偶性引發出學生懂得換位思考，能用不同的角度看事情，以多元觀點看待各領域的內涵，是老師對這堂課的一種期待，雖然沒有放進課程目的之中，卻希望能埋進學生的心魂，種下一個種子，但不要求學生需要做到，很開心每次的回饋之中，或多或少都有學生會提到此一觀點。

四、整體：A 等級 78%、B 等級 19%、C 等級 3%

在學生繳交的工作本中，除了需要完成所有的內容，也要將各個標題按順序編排妥當，若順序有錯誤會歸類到 B 等級。笛沙格定理的十點十線可以由繪製過程看出學生是否理解相關內容，只要完成四張以上正確無誤的圖，就會給予 A 等級，並非以全部完成來評斷。而指標中的最後一點，是整體性等級的主要判斷依據，學生除了要繪製完成極性圖與曲線變換作圖（圖 5-72），文字的說明也很重要，需要能對關係做出清楚的描述，判斷出橢圓、拋物線及雙曲線在各個定理間

具有一致性，並理解曲線變換圖形與圓錐曲線的整體關係，才會給予 A 等級，未能有相關性描述的學生則會給予 B 等級。

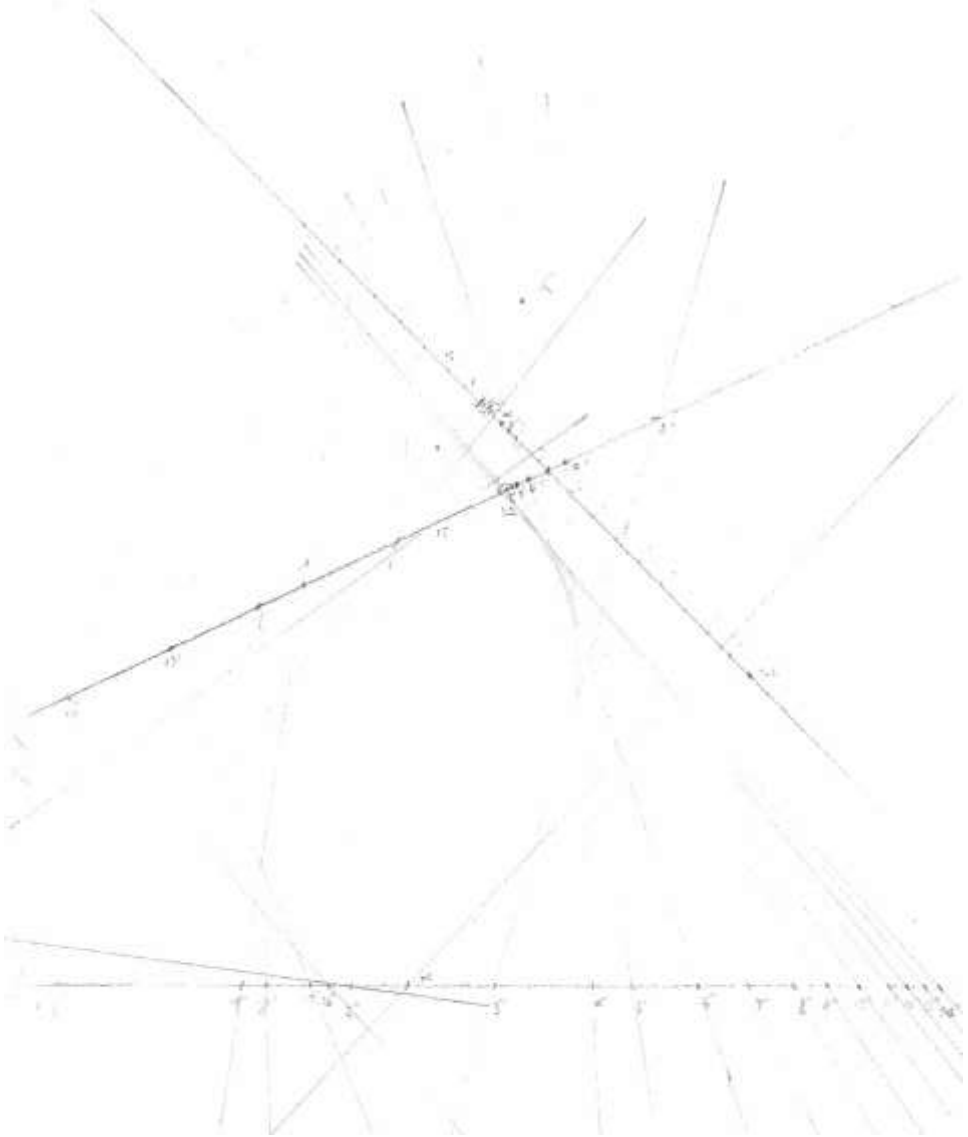


圖 5- 72 曲線變換作圖

資料來源：工-107-17

在整體性方面，著重在指標判斷的後兩點，首先是在笛沙格定理關於十點十線關係的探討中去感知整體性的關係，大致上大家都能有詳細地的描述，也都可以完整的完成作圖，在感受的書寫上，並未要求一定要書寫，只是以邀請的方式鼓勵學生們書寫，約有 10%的人有記錄下這方面的感受。其次是由於引進無限遠點的概念，形成沒有例外的統一性，學生們理解到可用不同的立基點看待各種關係，透過點、線對應關係所衍生出現象，在橢圓、拋物線及雙曲線中都有相同的結果，甚至可以說這三種圖形是同一種圖，只是以不同的樣貌呈現而已。而所有的定理都可以直接利用投影平面（Mobius Net）中的直線來呈現，也令學生們看到整體中的部分呈現，也更有一致性的整體圖像。但最後的心得回饋中只有少數

幾個學生提及整體性的部分，這是未來課程必須要再加強之處，或許可以直接以開放性的寫作方式，讓學生們能清晰地寫下各種關係中的整體脈絡，並且留下感受性的文字描述。

五、步驟書寫：A 等級 87%、B 等級 11%、C 等級 2%。

在步驟書寫上，只要能讓讀者從閱讀步驟而畫出圖形，就會給予 A 等級，並不一定要用數學的語言；若無法從閱讀作圖步驟而完成作圖，或在任何一個定理的步驟有缺少書寫，則會給予 B 等級。第一個出現的帕普斯定理是讓學生自由的書寫步驟，只要能清楚表達即可，再慢慢地引導學生使用數學的語言作對偶關係的書寫，大部分學生能在笛沙格定理及其對偶之後的相關對應以對偶的方式書寫出作圖步驟，但對於使用數學精簡語言描述比較無法精確的掌握，通常要到巴斯卡三角形，並由老師引導才會比較能以數學精簡的方式書寫，或許是跟華德福學校過往並未完整訓練邏輯證明的書寫有關，所以在此課程中再一次給出練習的機會。另一方面，在對偶關係中，兩線交一點時，因畫完兩線，其交點已清楚呈現在紙上，學生通常不會再多加說明，但是兩點連一線時，取完兩點，必須透過連線才能有線的出現，這是在步驟書寫中，學生比較難突破的一點，大部分的學生都需要透過老師的引導，才會在步驟的書寫上更清楚的呈現此一對應過程。

六、邏輯推理：A 等級 81%、B 等級 16%、C 等級 3%

在邏輯推理的指標項目中，學生需要在各種不同的關係中，用自己的方式有根據的做判斷，並沒有一定的書寫格式，為了鼓勵學生願意嘗試各種角度切入，願意嘗試各種方法，並不會以嚴謹為考量點，只要有前因後果，縱使之間有些細節並未考慮清楚，沒不影響評量等級的依據。以透過圓做點、線對偶的極性圖為例，如圖 5-73，學生先描述可能的現象，並用文字書寫下是根據之前學到的那些概念進行判斷，是學生自己經過思考後的紀錄，就會給予 A 等級。若只能描述現象，在檢討後，紀錄大家的想法，或是只有圖形呈現，會給予 B 等級。

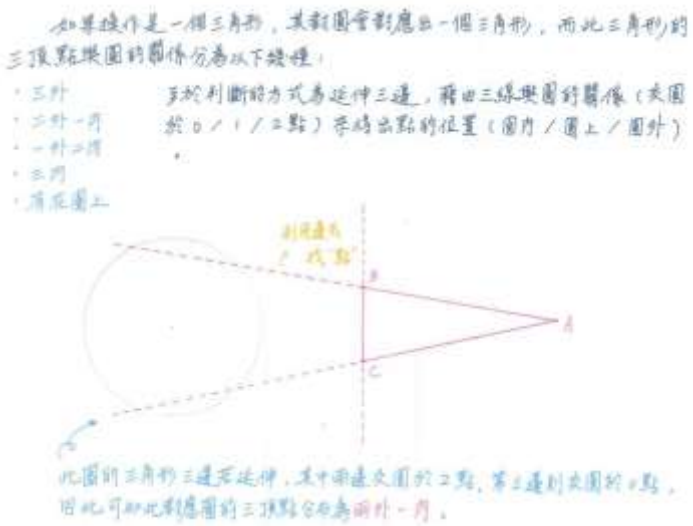


圖 5- 73 點線對應推理

資料來源：工-108-9

此課程鼓勵學生用自己的方式表達其思考歷程及內在觀點，注重邏輯關係的推理，但是並不要求一定要用數學的語言，並不是傳統的幾何證明書寫，而是藉由開放性的思考，有邏輯的推理出異於過往的幾何觀念，課堂中，嘗試運用新概念做邏輯推理去判斷各種關係，學生們認為此課程相較於其他的數學單元來得更具思考性。傳統上，當帕普斯定理出現，一定要證明出為何三點共線，但投影幾何課程不是要做這一類的邏輯證明，而是挑戰幾何更本質性的觀點，首先嘗試挑戰平行線沒有交點的概念。在課程一開始要求學生以「沒有例外」為前提，為課程出現的現象做推理，學生在第一次遇見兩線平行時，通常還是處在歐氏幾何的觀點中進行思辨，但在提出無限遠點的概念後，思考無限遠點的位置時，是課程中第一次精彩的對話，透過學生們自己表達意見，彼此分享不同的觀點，並不要求一定要接受無限遠點的存在，而是藉由一個個定理的出現，讓學生們看見無限遠點存在的好處。在進入到極性圖時，已經有少數學生能自己先推理出因為無限遠點的存在，而使圖形呈現連續性，並且可以快速接受雙曲線透過無限遠點將兩者連接在一起，而是一條「單曲線」的說法，更可以掌握住所有的圓錐曲線是同一種形，只是在不同時刻看見的不同樣貌而已。

七、主動參與：A 等級 94%、B 等級 6%、C 等級 0%

當學生在聽完老師說明作圖步驟後，能投入畫圖，或提出相關的問題，或提出自己的疑惑；在討論議題的過程中，不論是主動或是經過邀約，願意分享自己的觀點；在工作本時間能善用時間完成當天的任務，只要在上述三個時間點能主動投入，都會給予 A 等級。因為是三週共 15 天的課程，考量學生有各種課後的社交活動，或其他各種可能的情況，並不要求學生每一堂課都要做到上述的要求，只要能達到上課天數的 80%即可。若學生聽完老師說明作圖步驟後，有拖延的行

為出現，不論是因為沒有好好聽講而不知如何畫圖，或是有疑惑而沒有提出，總之未能好好畫圖；在討論議題時，無法參與，處於狀況外；工作本時間未能善加利用，處在放空或做其他事的情況，其天數只要達上課總天數的 20%以上，就會給予 B 等級。

只要能在學生們都理解的情形下做觀念的堆疊，學生們的學習胃口都是很好的，當然，有時會遇到其他外在的因素而導致學生無心在課堂上，但因為課程內容本身很吸引人，只要給出關懷，允許學生偶爾的斷線，通常在下一堂課，學生就會再次把心思放回課堂之中。而投影幾何課程跟之前的觀念連結並不深，大家可以輕鬆的畫圖，觀察、討論，並且欣賞每一張圖形完成時的神奇與精美，在課堂上幾乎每個學生都能積極參與，是一堂重新讓學生愛上數學的課程。課程的安排在一開始都盡量符合所有學生的程度，學生整體的參與度也確實很高，都能跟著老師的節奏好好學習，只有少數幾個學習習慣比較不好的學生，在課程後段處於狀況外，跟課程慢慢進入比較思考性的議題也有關係，

八、想像：A 等級 82%、B 等級 15%、C 等級 3%

在這個指標向度中，從兩個部份來評量，首先是心得回饋，例如有提到：「想像力是你的超能力！想像的空間可以無邊無際，但人的思維各異」（心-111A-9）、「思考變廣闊，世界同時也變大了」（心-108-9），都會是 A 等級；另一個是課前冥想，除了過程中老師的觀察判斷，也會在冥想過後的討論及工作本的書寫中評斷，能說出或寫下關於冥想過程中自己的狀態，都屬於 A 等級。若在心得中並無提及，並且在冥想時無法進入狀況，呈現發呆的情況，會在課程後進行晤談，依然無法提出任何感受的人，會給予 B 等級。

這裡的想像分成兩部分來看待，一種是課程前冥想，例如：理想平面的無限擴大，感受邊界的現象；各種幾何圖形的無限擴大，感覺其形狀變化的樣貌；空間中兩相交平面的轉動，體會無限遠線存在的可能性。冥想的過程，學生總是會產生許多疑惑，但為了冥想流程順利，讓學生不受干擾，過程中請學生不提問，用自己的方式持續冥想，直到整個過程結束，雖然不在冥想過程中直接解惑，但學生反而能更開放的接受各種可能性的存在。在冥想結束後，透過學生抒發自己的感受，彼此聽見每個人想像過程的不同思維，嘗試記錄下最有感覺的情況。這樣的冥想過程，學生跟自己的疑惑共存，用自己的思考方式參與其中，或許一開始並不是太有邏輯性，但能在後續的討論中讓概念更清晰。

另一種是推理過程的想像，例如：投影三角形中，當光源與頂點等高時，確認三角形的存在；從克卜勒螺旋槳思考判斷無限遠點存在的可能性；畫各種圖形時，想像推理直線如何在紙張外相交、圖形本身在紙張外的可能關係。當直線交點或圖形超出紙張，通常學生會有排斥感，當時都以這是老天爺給的禮物，邀請

持續思考之間的關係，通常學生在不斷的鼓勵下都願意持續挑戰畫完整張圖，畢竟很多的情況確實只能在腦中作純思考的練習，無法「具像化」的思考。透過冥想與推理想像兩者交互運用，學生們有不同程度的感受，從他們的回饋中，可以知道這個充滿想像的課程對學生有著無比的魔力。

九、驚奇感：A 等級 82%、B 等級 15%、C 等級 3%。

投影幾何課程有很多地方能引發學生感到驚奇，只要學生在課堂中有感受到驚奇之處，願意寫進工作本，都會給予 A 等級。而課堂中都有參與，也都清楚知道老師所要傳達的內容，但並無情緒反應，也並未在工作本留下隻字片語會以 B 等級紀錄，雖然其中不乏個性比較內斂，不善表達情緒的人，但因為研究者無法確認這一類學生內在的狀態，所以還是以 B 等級評斷。有些人驚訝的是為何會有那麼多巧合；有些人從平行線有交點就已經感到驚奇，「雖然跟以前學習的概念不同，卻覺得思考變得寬闊了」（心-111B-18）；有些人對極性圖的繪製特別有感覺，「想像到了無限遠的地方後從另一邊又飛出來，而且它們還是同一條線，就覺得很奇妙」（心-111A-17）；有些人轉變了對圖形的認知，「把視野放大，要用腦想像」（心-111A-4）；有些人欣賞著由簡單的點、線在一張白紙上幻化成各種奇特的性質與特徵，「震驚於看似無關、無聊、無可必要的內容，卻在最後匯聚成為無可或缺的角色」（心-111A-7）；有些人驚嘆於曲線變換的圖形，有些人享受在美感體驗的圖形上，「一瞬間畫出圖形時真的會忍不住驚嘆一聲『哇』」（心-111B-1）。每一個主題都有不同的學生被吸引，在心得回饋中，雖然不是所有的學生都能清楚表達出內在的激動，有人只能以簡單的神奇、奇妙、驚奇、讚嘆、想像、美…等形容詞來表達。幾乎不曾聽到有哪一個學生是排斥的。

十、自由感知：A 等級 92%、B 等級 5%、C 等級 3%。

不論是在課堂的發言中，或是在工作本的書寫上，或是最後的心得回饋中，只要能在不受他人影響下說出喜歡不喜歡等任何跟感知方面有關的詞語，對課堂提出的任何定理觀念能自由的表達好惡，都會給予 A 等級。如：「雖然有很多觀念無法接受，但還是覺得這是一個很有趣的觀念」（心-111B-14）、「這依然是我上得相當愉快的一堂課，隨著它可能跟數學有關以外，其他無論是作圖或者是思考，都是完美的，我不知道我可能在作圖的時候腦袋開機了，不然我怎麼會感到如此輕鬆呢」（心-111B-2）、「我從未想過那麼簡單的點、線、面可以在一張白紙上幻化成那麼獨特的性質，對稱以及特徵，我喜歡這堂課，他引領我進入數學之美」（心-111B-1）。若是整個課程中，都只是完成交代的作圖及其說明，未表達任何的感受，因為感覺是屬於個人內在的感知，基於尊重有不表達的權利，但因為無法判讀，還是評量為 B 等級。至於無任何內容，沒有任何資料的呈現就

會是 C 等級。

在這個向度上，主要是依據學生的心得回饋做判斷，再輔以老師在課堂中的觀察記錄給出最後的評量。很多人並沒有直接提到「自由」二字，但能真實說出自己對此課程的感受，有人一開始處於厭惡的狀態，甚至對無限遠的觀點有嚇到的感覺，主要還是因為跟過往的學習差異太大，一時之間不能接受這樣的觀點，此時允許學生有這樣的感受，再利用其他定理一次次吸引學生思考，反而能讓學生在往後的課程中更投入；有人從一開始就不斷的被線條形塑而成的幾何形狀、相同作圖步驟產生的精美圖形所吸引，在繪製幾何圖形的過程中得到意想不到的驚嘆。課程本身並不會限定學生要以什麼姿態面對，讓學生保有開放的感受，讓自身的情感自由地展現，做最自由的感知。

十一、 自由思考：A 等級 53%、B 等級 44%、C 等級 3%。

所有與定理相關的圖形，老師一定都會先作圖示範，在引導學生的過程中，學生與老師黑板所繪的示範圖形若可以相似度越來越小，表示學生願意嘗試自己探索不同圖形存在相同關係的可能性，是一種相對自由的展現；在作圖時出現任何疑惑之處，在提出問題前，已先自己思考、推理過自己的想法，並非只是提出自己碰到的問題；在極性圖的討論中，可以更容易判讀學生是否能運用無限遠點的概念，為圖形在每一個特殊時刻做推理，有自己的想法，或提問，或歸納，不斷地往更深的內容探問，都會給予 A 等級。能將課堂討論的內容記錄下來，而沒有做相關性的自我延伸，雖然有自己思考過後的文字說明，但未能顯示出有「自由」的成分在，會給予 B 等級。

透過想像，讓自己的思考更開放，分析作圖過程所產生的疑惑，持續探索各種可能的推理，挑戰不同立基點的存在，從「我們在觀點碰撞間尋找自己的立足點」（心-110B-1）、「在宇宙空間之外」（心-110A-5）的字語中，感受到學生享受在自由思考、運用邏輯推理做自由判斷的樂趣之中，進而分辨出投影幾何與歐氏幾何本質上的差異，達到理性上的自由。在課堂中，允許每個人可以有天馬行空的想法，讓觀點完全不受拘束，但必須驗證這些想法，可以是實際的動筆作圖確認想法的對錯；可以是單純在頭腦中進行抽象的思考，不管形式為何，都需要以理智做邏輯推理，得出令大家都能接受的推理過程，「會不會無限其實就是精準的，這是上完投影幾何我會留下的問題，也是最大的收穫」（心-111B-7）。只是深入的理性思辨，並不是大部分學生都可以做到，約有半數的人還是需要有他人的解說及引導才能被動式的接受，在聆聽過大家的分享與討論後，通常大部分的人都可以接受投影幾何打破歐氏幾何觀點的部分。不論數學程度的差異有多大，學生們喜歡這個課程，沒有人排斥，差別只在於喜歡的程度如何，著實讓人感受到投影幾何魅力之所在，相信能夠藉此課程培育學生自由想像的數學素養。

指標等級的判定，主要依據表 5-5，做出 A、B、C 等級的區分，在所有的學生中，108 年的班級有三位學生整體狀況相對無法進入學習，各個指標中，除了對偶及主動參與兩項沒被歸在 C 等級，其餘指標這三位學生都被歸在 C 等級，主要原因跟三位學生過往即放棄數學，只要有稍微比較難的內容出現，他們就不願意在參與其中，對於學科類的學習並不積極，尚未建立起良好的學習習慣，雖然還願意在作圖上略為努力，但僅在最基本的部分，無法作更深入的探討。而部分指標會有另一位學生也在 C 等級之中，整體狀況跟這三位學生雷同，是整個課程老師最需要再努力的部分。整體而言，所有指標達 A 等級的平均比率為 84.4%、B 等級的平均比率為 13.4%、C 等級的平均比率為 2.2%，最佳的五個指標分別為繪圖、無限、對偶、主動參與與自由感知，達 A 等級的比率皆有九成以上；次佳的指標也有五個，分別為步驟書寫、邏輯推理、驚奇感及想像，達 A 等級的比率有八成以上，而整體的指標是 78%，接近八成；最差的指標為自由思考，達 A 等級的比率為 53%。而美感教育方面，最佳的指標是自由感知，達 A 等級的比率有 92%，次佳的兩個指標是想像與驚奇感，達 A 等級的比率有八成以上，最差的指標是自由思考，達 A 等級的比率只有 53%，是整個課程可以再努力的地方。

表 5-6 以 A/B/C/Σ 代表每一班三個等級及全班人數的分布圖。其中 108 年及 111B 的心得回饋都有七人超過繳交期限，110B 心得回饋有 1 人缺交，都列入 C 等級，而 111A 是在疫情期間進行線上課程，整體狀況明顯比實體授課的狀態差異較大。

表 5- 6 六個班三面向等級的人數

編號	班級	課堂參與	工作本	心得回饋
甲	107	28/4/0/32	21/10/1/32	28/4/0/32
乙	108	27/4/0/31	26/2/3/31	18/5/8/31
丙	110A	23/0/0/23	20/3/0/23	18/2/3/23
丁	110B	24/0/0/24	24/0/0/24	22/1/1/24
戊	111A	15/7/0/22	15/1/6/22	13/0/9/22
己	111B	21/0/0/21	20/1/0/21	14/0/7/21

資料來源：研究者整理自評量系統

在 110 年的教學，最大的改變是在課程中放進美感體驗，除了受疫情影響的班級外，很明顯的能有效提升學生對課程的投入程度，有幾個學生甚至寫進了他們的回饋之中，讓學生在一開始即透過自己的雙手繪製出驚奇的圖形，深深抓住學生的心魂，從昨晚的沉睡之中清醒過來，在華德福學校不會以考試成績要求學

生上課的專心度，老師們非常需要引領學生看見課程的精采及其重要性，讓學生主動投入。一些長期害怕數學，無法投入數學課程的學生，也都能在這個課程中重新拾獲對數學的信心。到了 111 年嘗試在第一堂課以投影三角形開始，相較於前四個班的狀態，學生比較能以更開放的態度接受不一樣的定義觀點，對平行線在無限遠有交點的說法也樂意不斷的探討，比較少有抗拒的狀態出現。整個課程調整至今，在課堂參與中都有超過九成的學生願意持續三週跟隨老師的節奏，全班一同沉浸在投影幾何課程的氛圍之中。工作本的書寫也隨著課程的調整，學生更願意投入時間完成，不僅僅是對圖形繪製的品質，也能在觀點的陳述中，更展現自己的想法。至於心得回饋則無明顯的不同，雖然 111A 班有多人未繳交，與該班級第一週是線上課，且該班級在課程結束的兩天後，就進行為期三週的職業實習，導致無法為心得回饋進行妥善的書寫。

扣除掉 111A 班的特殊狀態，108 年及 111B 班的心得回饋都有七人被列入 C 等級，大部分是因為學生遲交，而遲交學生的狀態有兩種，一種是為了追求高品質，需要多一點的時間書寫，讓整個內容更加完整，這樣的人占大部分，但因為當時已跟學生說明規定，只要遲交就會以 C 等級計算，所以並未做任何調整。另一種是本身就有拖延的習慣，總是會遲交作業，需要老師催促才會完成並繳交。而 107 年該班的工作本繳交也不是太理想，有 10 人被列入 B 等級，約占全班的三分之一，其原因有二，研究者是第一年教這門課，且是該班的導師，對學生的要求比較嚴格，給的分數也比較低；另外，該班在工作本的繳交上比較積極，也會每天書寫並準時在期限內完成，相對的，有時會有「參考」他人工作本內容的情形出現，但研究者在工作本的要求上，最重視的是「真」，以自己的能力真實書寫出自己的感受及想法是一大重點，只要內容有雷同的部分，就會給予比較低的分數。

第六章 結論與建議

本章依據本論文之研究架構及成果，綜合研究分析，歸納出具體結論，並提出具體建議以供數學教育一個新的方向。

第一節 結論

本小節依據各章節的結果與內容，綜合歸納得出「歐氏幾何培育邏輯演繹、近代幾何培育自由想像的數學素養，從美感與數學教育確立投影幾何課程的理論基礎，從課程的設計與實施確認投影幾何的價值」四個結論，分述如下：

壹、從歐氏幾何培育邏輯演繹的數學素養

在古希臘時期的幾何發展上，曾經創造出各式各樣的工具來幫助作圖時的精準度，好比任意三等分角的問題中，古希臘人就曾經使用特殊的工具來解決，但當時卻逐漸以沒有刻度的直尺及只能畫圓的圓規為主要工具，不允許使用其它的工具來作圖，這絕對不只是為了精準度而已，而是一種完美理型下的選擇。頭腦中可以自由創造出任意長度的直線、任意大小的圓形，而直尺與圓規就只是輔助思考的工具而已。以完美理型的點、線、圓作為根基，接下來就是邏輯演繹的天下，所有的觀念都要有嚴謹的證明過程，確保得到的概念不會有任何的錯誤，所以單純只用尺規作圖是邏輯演繹的產物，是為了輔助邏輯演繹的工具，尺規只是外顯的形狀，更重要的是腦中內在的思辨。邏輯演繹可以說是古希臘人留給後世最美好的思想禮物，將多種觀念透過嚴謹的邏輯演繹統整出更一般性的概念，以簡單的形式呈現出隱藏在背後的一致性模式，是不會被任何因素改變其形式的表達，有穩固的邏輯基礎，這是邏輯演繹帶給人類最穩固的安定感，而數學最能呈現出這種獨特的美感。

投影幾何雖然在幾何的立基點中，選擇不同於歐氏幾何的觀點，但其邏輯演繹的方式並未有任何的差異，從改變立基點，從不同的視角切入看待幾何，是一種新的挑戰，同時有讓學生不斷檢視自己過往學習的觀念是否有可以調整之處，從不斷的懷疑，不斷的重新作出嚴謹的邏輯推理，做出更開放，更具多元視角的邏輯演繹。

貳、從近代幾何培育自由想像的數學素養

十一年級（高二）的青少年處在一個人生中特殊的位置，經過青春期初期的叛逆，比較具有思考的能力了，但他們更加想要挑戰權威，在生活上，會與來自教條上的限制作抗爭，不論是何種規定，總有屬於他們自己不成熟的想法，願意做出行動來挑戰是一個值得鼓勵的行為，跟過往的生命經驗做整合，透過一次又一次的抗爭，再重新思索出新的生命經驗，這種有形的作為是比較容易看得到的

行為表現，且可以直接與青少年對話。但在無形的知識上面，因為考試的制度，給了青少年一個必定有標準答案的假象，讓青少年缺少了挑戰來自老師們、書本上權威知識的機會，青少年處在被動接受外在傳達的知識，而缺少更深一層次的思考，也就沒有機會做到「觀察自己的思考」，更不用說要試著「思考自己的思考」了。

投影幾何課程從不需要任何計算能力、也不需要太多技巧的畫圖開始，讓學生不受限於過往數學能力的差異，重新認識數學，看見數學更本質、更純淨的內涵。透過一張張自己所繪製的精美作品，享受線條形塑各種圖形的美感經驗，尋找隱藏在所有圖形中的共同法則。整個過程中，學生帶著主觀意識，卻又要以客觀的模式觀察著每一種現象的發生，並思索著這個現象背後可能的定律，這階段的思考已經不再都有具象的事物可供觀察，而是只能透過想像，在腦海中建立圖像，找到形成它的一致性法則。而近代幾何的發展過程中，多位學者為我們示範著，他們在自己過往的經驗中，用最自由的姿態去尋找事物的本質，不被任何因素所束縛，觀察、思考著自己的思考，以全新的認知重新認識來到眼前表象間的關係，雖然人們總是用舊有的觀念來學習新事物，但他們以自由的姿態，想像全新觀點來挑戰過往，遇見任何現象，先從感受出發，保持內心處在寧靜的狀態做客觀的觀察，檢視內在產生的獨特感受，對每一個現象保有好奇，讓自己在想像的世界中搭起抽象與現實之間的連結，以自由想像的姿態，尋找到解決之鑰。

叁、從康德、史代納及數學家觀點確立投影幾何課程設計的理論基礎

投影幾何的課程設計試圖將美感教育到數學教育的理論融入其中，在課程的設計安排時，依循康德對美感的四個判斷，首先讓學生對內容在無利害關係下，由內在自然產生的一種快感，每個人依著自己的看法，不依賴任何概念作出單純的感官判斷，有時依照特定的概念或以普遍的抽象原則來理解、分析事物，以理性思維做邏輯判斷；有時以自由的心靈，帶著部分經驗，融合理性與感性，連結特殊性與普遍性，保有形式上的純粹，讓事物的本質意義更多樣豐富，產生不依據概念而得出的一種必然性愉快判斷，享受過程中的美感經驗。欣賞圖形的優美，並從點、線的對偶性、無限的關係、極性圖與曲線變換圖形的連續性、整體性之中，喚醒學生內心裡的心魂力量，以寧靜的心、完全自由的思維，從內在點燃對那本質所具有的壯美之火，於三周課程期間體驗翻轉過往概念的精神自由狀態。並以史代納關於想像與自由的理論架構，讓學生充分從感知與思考的交織經驗中做到自由的學習，嘗試引導學生能觀察著自己的思考，思考著自己的思考，開放感知，讓圖像於內在心魂中流動，想像著抽象關係的變化，運用自身過去的經驗，推理出屬於自己又符合邏輯的結論，透過意志、情感與思考讓美感經驗平衡發展。華德福教育培養 14-21 歲的青少年追求「真」，讓學生有勇氣，敢真實

的呈現自我樣貌；敢自由的追求真理，敢向世界依循自己的判斷，找出屬於自己的答案。

在學習數學的過程中，一定會產生疑惑，此時試著用歡喜的心看待，帶著崇敬感來面對，遇到挫折時，可能因此失眠，無助的柔爛好幾張紙，陷入徬徨的痛苦之中，卻願意持續投入其中，嘗試理解，想像可能關係的存在，享受在偶然出現的靈光中，驚嘆獲得靈感湧現的那一瞬間，嘆服法則定律背後神奇的一致性，不斷重複痛苦、欣喜；挫折、振奮；懷疑、篤定…等，種種正向與負向的情緒，卻也因此更加清晰地理解之間的關係。數學不僅僅是只能運用，更是有著模式，以簡單形式呈現其純淨的本質，對於高中生而言，他們開始追求「真」，此時的重點是良知意識的培養，引領他們走在真實、真理和自由的追求道路上，向世界使用自己的判斷，找出屬於自己的答案，搭起抽象與現實之間的連結，形成自己最真實、最自由的美感經驗。研究者認為數學素養是「以自由感知為基礎，經驗世界存有的美，以自由想像擴展視野，進而自由思考般的深入探索，輔以邏輯推理小心求證，做出自由的判斷，找出世界之中的真與純淨」。

肆、投影幾何課程設計可包含本研究的五大目的

本課程理念為培養學生擁有聽見內在聲音的能力，能做出自由判斷與批判性思考課程中的各種關係，從中獲得包含驚奇與疑惑的各種美感經驗，不斷驗證史代納給投影幾何課程有關治療前景、二元性及保有驚奇感與疑惑感共存的三個方向。其目的的設定，是在幾何史的脈絡下，以邏輯演繹為基底，強調自由想像的重要性，依據理論基礎中的美感教育及數學教育，歸納出五個目的，五個目的並沒有哪一個特別重要。在現今體制的數學課，會有目的一「繪製精準圖形」的基礎能力；目的二「理解無限概念」及目的四「運用邏輯推理做出正確判斷」，但體制內在理解無限概念的同時，沒有強調要「覺察自身感受」，在目的四的推理中，著重在邏輯演繹的線性推理，比較不會要求「掌握幾何概念的整體性」，而投影幾何課程，注重目的五「練習自由想像的數學思考，產生驚奇美感經驗」的重要性，從目的一開始堆疊，同步培養目的二及目的三「從點、線兩種視角的轉換，透過思考，看見並欣賞對偶性」的能力，過程中輔以目的四，期待能以自由感知、自由思考，透過想像讓心魂深處的圖像流動，開放內在眼界，拓展出無限可能，再以邏輯推理小心求證，既不被侷限，又不至於走偏。因為目的五被數學教育所忽略，所以本研究特別強調它的重要性，並非它相對於其他四個目的來得重要。

伍、投影幾何課程內容可採用本研究的 13 個單元

課程內容的安排，首先由投影三角形及完全三角形引入無限遠點的概念，強調這只是一種說法，並不要求學生一定要接受，將學習的主動權還給學生自己。

接下來從帕普斯定理及其對偶定理、笛沙格定理及其對偶定理、巴斯卡定理及布萊安強定理中，一步步引領學生看見點、線的對偶關係，欣賞對偶關係，直到能自己發現圖形對偶關係的存在，在作圖方面，鼓勵學生在作圖規則下，能自由自在地選擇自己想要嘗試的畫法，讓學生自己觸碰到無限的問題，進而自己推理可能的情況，視現場教學情況，全班一起討論兩線平行的特性。接著將點、線透過圓創造出的對偶關係，由簡入繁的畫出至少三種極性圖，從無限、對偶的關係，推理出圖形的連續性與整體性。在課程尾聲給出曲線變換圖形，以所有過程都是直線卻能形塑出圓錐曲線的存在，讓學生沉浸在想像、驚奇感、自由感知、自由思考的饗宴之中。最後以 Geogebra 軟體，統整所有課程的內容，利用投影平面統整課程一開始到最後的所有作圖，並看見曲線變換的連續性關係。視教學現場情況及學生整體狀況，決定是否給予課後延伸的補充內容，為想再精進的學生有進一步探索的可能機會。

陸、投影幾何課程實施可採取本研究的教學方法

在教學模式上，以歸納法為主，在每堂課最後約 30 分鐘的時間，繪製各種圖形，讓學生透過觀察猜測可能的關係，運用想像與思考，自行推理驗證自己猜測關係的正確性，經過一夜的睡眠之後，於隔天花大約 30 分鐘的時間，藉由小組討論、大堂分享，從中整理出大家都能接受的新概念，進一步推理出隱含其中的定律。若有人還是感到疑惑，適時留給學生思考的時間與空間，或請學生暫時將疑惑放在心中，先跟著課程往前走，有時疑惑會在意想不到的時刻被解決。整個過程不能太快給出答案，確保學生能有自由、獨立思考的機會。在課程節奏的安排上，美感體驗幫助學生收心進入課堂的氛圍，接著回顧之前的內容，鞏固剛在腦中形成的新概念，給出時間讓學生書寫工作本，為自己統整接收到的新概念，也藉此幫助學習相對比較慢的學生有機會再一次思考，進而熟練、內化成屬於自己的概念，最後給出新進度，讓學生自行探索。

柒、投影幾何課程評量可採納本研究的 11 項指標

透過學習表現的繪圖、無限、對偶、整體、步驟書寫及邏輯推理六個指標，評量學生是否達到課程中前四個目的，另外透過學習態度的主動參與及想像、驚奇感、自由感知與自由思考四個美感向度共五個指標，評量學生是否達到第五個目的，藉此檢視整個課程的教學成果。所有指標達 A 等級的平均比率為 84.4%、B 等級的平均比率為 13.4%、C 等級的平均比率為 2.2%，最佳的五個指標分別為繪圖、無限、對偶、主動參與與自由感知，達 A 等級的比率皆有九成以上；次佳的指標也有五個，分別為步驟書寫、邏輯推理、驚奇感及想像，達 A 等級的比率有八成以上，而整體的指標是 78%，接近八成；最差的指標為自由思考，達 A 等級的比率為 53%，這是整個課程可以再努力的方向。比對史代納給出三個方向中

的第三點：當學生透過基礎的思想，達到使他們感到困惑和驚訝，老師就算實現了應該實現的任務。雖然此指標達 A 等級的比例相對較低，但給出學生自由探索的時間，或許還有很多學生未能做到自由思考，老師也算達到一定程度的課程目的了。打開學生們的視野，在他們的心魂之中種下每個觀點都有它的立基點，而選擇使用哪一個立基點，需要自己心中有一把清晰的尺，有邏輯的依照理性來評斷，透過想像與自由感知帶著驚奇感做到自由思考並不容易。整體而言，此 11 項指標評量成效良好，具備可用性。

幾何學的學習，不會只侷限在肉眼可見的範圍內，需要透過想像，讓內在的思考更無邊無際，擴展更多的可能性，雖然科技可以輔助學生具像的理解更巨大的世界、極微小的存有，但都還是有其侷限，而想像可以任意超越所有的限制，只要我們願意，就可以運用想像將感知及思考延伸到任何地方，此時嘗試將自己抽離出表象之外，意識到自己與世界的不同，但同時又不喪失情感的知道自己屬於這個世界，自由感知所有來到眼前的事物，並對感知到的事物進行思考，將自己提升到另外一個層次，帶著清澈、寧靜的心對思考進行觀察，透過自己保有自由、開放的心創造出屬於自己的思考，是只有自己才能給予自己的，不放過任何一個細小的內在聲音，檢視每一個產生於腦中的念頭，才是一個真正自由的人。在這個強調美感的素養時代，培育學生擁有想像、驚奇感、自由感知與自由思考的能力，此課程值得成為學生必修的科目，藉此培育學生自由想像的數學素養。

投影幾何課程不僅符合 108 課綱三面九項中的其中五項：「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」、「符號運用與溝通表達」、「藝術涵養與美感素養」，也與數學領綱中的六大目標不謀而合，如果能將此一課程放進數學領綱的學習內容之中，並思考相關配套措施，不讓國內的學子們只侷限在歐氏幾何的概念，而能讓更多人認識此一課程，展現此課程的價值，開展幾何、甚至是思想的新視野。

第二節 建議

綜合上述結論，研究者提出四點建議給教育工作者，及三點建議給教育研究者：

壹、給教育工作者的建議

一、就目的而言：兼顧邏輯演繹、自由想像的數學素養

在現今的主流教育中，幾何的教學內容僅止於歐氏幾何與解析幾何的範疇，並未有投影幾何或其他幾何觀點的課程。關於 20 世紀之後的幾何學研究，比較為人所知的相關成熟理論還有很多，雖然內容並非研究者專長，需要大量的時間做進一步的研究。但幾何學已經開啟新版本超過 200 年，我們的數學教育似乎也該

重新調整腳步，不能讓這樣的觀點塵封在相關研究人員與愛好者身上，更重要的是，不能讓大眾對數學有錯誤的印象。教育可以培養學生自由想像的內在涵養，搭配邏輯推理的細心求證，為學生們注入全新的視野看世界，建立起更全觀的視野，讓他們為自己建立一種用更高層次思考事情的態度，建立屬於自己的思考模式、思考系統，呼應世界變化的趨勢，趁著這股幾何學的潮流，向大眾介紹已經成熟的觀點，為數學素養搭建一個更確切的方向。

二、就內容而言：課程綱要納入投影幾何

三角形的內角和必定為 180 度；或直角三角形中，畢氏定理一定成立，這些是在理想平面中正確的概念，但當立基點改變，就會出現不一樣的結果。地球早已確定並非理想平面，而是一個球面，只是因為我們平常所能接觸的範圍過小，受到感官的影響，才會將地面視之為理想平面。不同的幾何平面觀點，或許不是那麼容易讓學生們接受，其中也還有很多的思辨空間，但引進投影幾何，是一個可行的方針，先以無限遠點及對偶性質，讓所有高中生看見觀念產生的立基點，讓他們知道世界存在不同的知識系統，最重要的是釋放他們的想像，讓想像能自由的拓展、飛翔，再輔以嚴謹的邏輯推理，用這樣的態度面對來到眼前的挑戰。研究者在實驗教育的環境中，秉持著對數學本質及人的發展需求為核心價值，進行課程內容、教學模式的探索，嘗試開發出新課程為青年學子們確立不同層次的價值觀，期盼為台灣的數學教育帶進新的火花。

三、就教法而言：教學模式以歸納法為主，搭配四個教學節奏

以學習者為主體，透過意志的行動、思考的自由，帶來情感的豐沛，注重人與世界的關係，讓學生帶著熱情，主動參與學習。108 課綱強調與日常生活的連結，從數學史認識人類進步的軌跡，而幾何的發展過程中，人類不斷的挑戰幾何世界的立基點，這是需要開放想像與自由思考才能達到的。而數學首重思考，思考可以從感知出發，藉由自由感知，開放想像，進行自由思考會是現代學生的重要能力。教育方式不能停留在想要教會學生們各種觀念，強調學會各種知識，若缺少了讓學生們體會當時學者為何會出現各種觀點的思考脈絡，是一種被強迫式的學習，缺少了自由想像的空間。以歸納法啟發學生的自由思考，為自己得出經過邏輯推理的自由判斷，課堂教學依照美感體驗、概念回顧、工作本整理、繪圖示範的節奏進行，引領學生嚐到思考的立基點，並體會當時人類會如此思考的歷史背景，將那特別的體會交還給學習者本身，重新檢視幾何思想立基點的關鍵之處，學生除了體會到自由想像的重要性，更能善用這一種能力。讓教育從著重教會各種概念，轉而培育學生更高層次的思考能力。

四、就評量而言；採用質性評量，豐富高中生的數學素養

自由想像是投影幾何課程中想要培育學生擁有的數學素養，想像的過程有時天馬行空、有時嚴謹推論，並不適合有固定的模式，需要很大的容錯，自由更是如此，允許學生能自由運用自己的觀點，創造出屬於自己的世界，用自己的路徑理解各種進入腦中的現象與想法，慢慢的與過往觀點做統整，得出新概念。學習模式因人而異，知識看似有固定的答案，卻需要在一定的立基點下建構出整個理論，在數學確定性已經失落的現代，我們可以還給學生一個更自由的空間，讓他們看見各種可能性，為自己選擇一個當下最理想的觀點。在這樣的狀態下，並不適合以單一向度作評量，必須綜合考慮各種面向，作為老師甚至要隨時處在一種陪伴、輔導的姿態，承接住學生的疑惑、無助、想放棄等等各種負面的情緒，鼓勵他們放下過往的成見，再一次重新出發，重新認識來到面前的挑戰，發揮想像力，自由的透過思考與之奮戰，縱使最後還是不想接受而暫時選擇放棄，也是可以接受的，畢竟在高深的數學世界裡，有些概念抽象得不易令人接近，有些想像的世界，好比無限遠，就不是每一個人都能在當下接受的，需要透過一次又一次的重複檢視，才有機會品嘗它所帶來的美好經驗，而這些都不是一份紙筆測驗可以檢視學生的學習成果，確認學生願意走在疑惑的路上，有時比學會一個概念來得重要。數學是一門特別的藝術，我們不需要所有人都會艱深的數學，就像不會要求大家都要能彈一手好琴，但卻要培養聆聽、欣賞音樂的素養，而數學也是可以讓人只欣賞而不需要熟練的一門藝術。華德福學校不是以考試為導向要求學生學習，雖然學會概念是教育的重要目的之一，在學會的過程中，其教學方法有各式各樣的理論，而華德福學校是以課程內容的精采度，配合人的發展階段吸引學生投入其中，來讓學生能吸收到老師想要傳遞的知識，更注重的是學生是以哪一種方式學習。豐富學生的想像空間，讓他們透過自由的思考來探尋世界，並無法只用量化的評分來評量一個學生是否有好的學習成果，就算不接受老師所給出的觀點，有時可能反而是一種好的學習狀態，有時更能顯現出學生獨立思考、判斷的能力，適度鬆綁量化的評分方式，輔以質性評量給予學生最真實的回饋，可以帶給學生更多不同的學習成果。

貳、給教育研究者的建議

每一種幾何都非常的博大精深，每一門課程都有它的重要性，都值得我們持續探索與研究，關於本論文的後續研究有以下三點建議：

一、文獻探討

目前國內關於投影幾何中文版的文獻不多，相關內容的翻譯書籍也不多見，比較完整的資料來源幾乎都是外國語言所書寫，除非擁有一定的外語能力，否則必須要很有心才能在相關領域進行探索，也就不容易在國內推廣相關的知識及其背景，建立大量的中文資料是值得努力的方向。

一位學者所處的時代背景與文化脈絡影響著他的哲學觀，而哲學觀又會影響其看待事物的方式。在 17 世紀，有兩個人分別為歐氏幾何做了不同方向的本質性延伸，笛沙格從整體出發，涵蓋了部分，提出投影幾何；笛卡爾從部分出發，堆疊出整體，發表解析幾何。現代並不難找到笛卡爾的資料，能清楚知道笛卡爾是基於哪一種哲學觀而提出解析幾何，至於笛沙格的生平資料就不容易查閱了，也就不是太清楚他是基於什麼樣的哲學觀而提出投影幾何，笛沙格的哲學觀值得我們持續挖掘相關文獻。

人類生存的地球是一個球體，而我們都生長在它的表面上，但我們在求學階段卻都沒有機會好好認識承載著我們的地球，球面幾何與我們的生活息息相關，是相當重要的存在，值得我們為它花時間好好研究，歐氏幾何在它面前顯得過於狹小、有限，讓我們的視野停留在身處的周遭環境而已。不同的幾何觀點可以拓展視野，現代幾何以不僅有歐氏幾何、投影幾何及球面幾何，還有非歐幾何、拓樸學、卡拉比-丘流形…等等，以及目前還在理論階段的弦論，這些領域的成熟度不斷地在接受當代大師的驗證，有些已經有了全面且成熟的理論基礎及豐富的內容，有些還需要後人更深一層的研究，而這些都值得介紹給學生認識，不是為了要學生學會所有的內容，而是為了打開他們的視野，讓他們知道世界有很多種樣貌，而不論是哪一種，都可以提供給有心人士自由的參與、想像，自由感知、自由思考。

二、課程內容

目前的課程內容安排，是在一定的架構下做微調而形成的，尚有以下內容可以適度放進課程內容之中，讓學生有更豐富的探索與思辨。

1. 從點、線作本質性立基點的改變，比較傳統點域形成的平面與改成線域形成平面的相同與不同處，探索可能出現的對偶關係或新觀點。
2. 曲線變換關係中，對橢圓、拋物線、雙曲線等形變過程的探索。
3. 探索莫比烏斯環特性，顛覆學生對「面」的想像，從驚奇感啟發內外翻轉的不同視角。
4. 實際製作出六錐反演體，探索它所帶來的特性，並透過嚴謹的推理過程，確定關係的存在。
5. 介紹 Oloid 與六錐反演體，結合木工、泥塑、手工等任何藝術媒材實際做出其形體，探索其中的各種關係。
6. 投影幾何利用大量「線」的關係畫出精美圖形，而「String Art」是以實作的方式創造出精美的藝術品，讓學生可以透過實作，真實產出屬於自己的藝術

作品。

三、教學方法

華德福學校在 11 年級都會教授此單元，但全台目前（2024）只有九所華德福高中[32]，有在這方面做深度耕耘的人更是少之又少，所以推廣這樣的概念並不容易，尚有待有心人士更加努力進行相關的探索。

本論文聚焦在教育美學的論點，設計出既能符合傳統數學教育，同時兼顧培育自由想像般數學素養的投影幾何課程，整體論文架構如圖 6-1：

[32]九所高中華德福學校分別是：宜蘭慈心、台北昱光、台北史代納、桃園新屋、新竹照海、台中磊川、台中海聲、台中善美真、雲林古坑

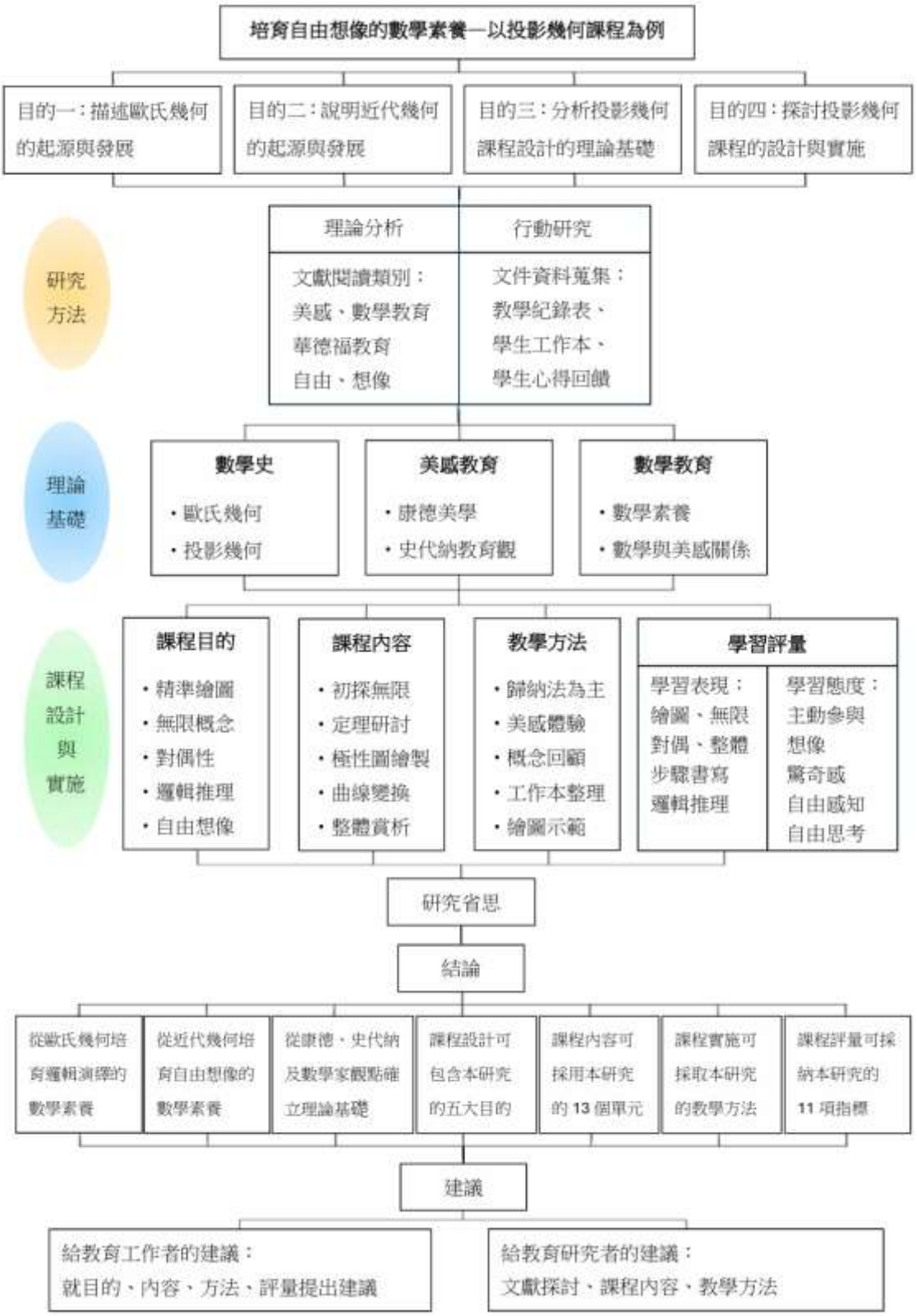


圖 6- 1 論文架構

資料來源：研究者自行整理

參考文獻

David A. Brannan; Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray.（2012）, **Geometry**, Cambridge University Press.

Hans Dirnb¨ock; Hellmuth Stache（1997）, **The Development of the Oloid˙Volume 1**, No. 2: 105–118

J. V. Field; J. J. Gray（1987）, **The Geometrical Work Of Girard Desargues**. Springer-Verlag New York Lnc.

Jan P. Hogendijk（1991）,˙**Desargues' Brouillon Project and the Conics of Apollonius˙Centaurus**（Volume 34, Issue 1）: 1-96.

Kevin Avison; Martyn Rawson（2014）. **The Tasks and Content of the Steiner-Waldorf Curriculum**. Floris Books.

Matthew Barton（Translated）（2019）. Compiled and edited by Edward de Boer. **Imagination Enhancing the Powers of Thinking.** 4Edge Ltd., Essex.

Organisation for Economic Cooperation and Development.（2021）. **PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK (DRAFT).** OECD Publishing.

Peter Baum; Karl-F. Gorg; Uwe Hanson; Markus Hünig; Klaus Labudde; Rolf Rosbigalle; Stephan Sigler; Robert Neumann（2014）. **Topics in Mathematics**. Waldorf Publications.

Charlotte-V. Pollet（博佳佳）（2020）。**希臘真的是數學的誕生地？**。數學傳播季刊，44 卷，3 期。中央研究院 數學研究所。

方永泉（2003）。**從「遊戲」意義的轉折來反思當代遊戲文化的特徵及其引發的教育思考**。教育研究集刊，第四十九輯，第三期。

王俊（譯）（2017）。Rudolf Steiner 著。**自由的哲學**。財團法人人智學教育基金會。

朱光潛（2019）。**西方美學史**。江蘇鳳凰文藝出版社。

朱建正；曹亮吉；田光復；呂輝雄；許世雄；曾俊宏；顏晃徹；林聰源（合譯）（1991）。Tord Hall 著。**高斯：偉大數學家的一生**。新竹市：凡異。

何畫瑰（譯）（2011）。Rudolf Steiner 著。**認識更高層的世界**。新北市：光佑文化。

吳定遠（1978）。**三角形內角之和＝180°**。數學傳播季刊，2 卷，4 期。中央研究院 數學研究所。

李心儀；劉雲英；謝叔樺（合譯）（2005）。Ron Jarman 著。**讓孩子與數學真實相遇**。臺北市：洪葉文化。

李文林；鄒建成；胥鳴傳（譯）（2004）。Victor J.Katz 著。**數學史通論（A History of Mathematics）**。高等教育出版社。

李坤崇（2004）。**修訂 Bloom 認知分類及命題實例**。教育研究月刊，122 期。高等教育。

李國偉；黃文璋；楊德清；劉柏宏（2013）。**教育部提升國民素養實施方案--數學素養研究計畫**。教育部。

李崗（2006）。**J.-F. Lyotard 對 I. Kant 壯美觀的解構及其在情意教育上的省思。**教育研究集刊，第五十二輯第三期。高等教育。

李淳玲（譯）（2011）。文哲著。**康德美學**。臺北市：聯經。

周念縈（譯）（2017）。Frank Wilczek 著。**萬物皆數**。臺北市：貓頭鷹。

宗白華（譯）（1987）。Kant 著。**判斷力批判 上卷**。商務印書館。

林逢祺（2015）。**教育哲學**。臺北市：五南。

林聰源（2001）。**數學史—近代篇**。新竹市：凡異。

林聰源（2004）。**數學史—古典篇**。新竹市：凡異。

芮虎；李澤武；廖玉儀（譯）（2014）。Rudolf Steiner 著。**作為教育學基礎的人的普遍智識**。財團法人人智學教育基金會。

邱心柔（譯）（2018）。飲茶著。**叛逆就是哲學的開始**。新北市：大牌。

柯勝文（譯）（2005）。Rudolf Steiner 著。**人智學啟迪下的兒童教育**。台北縣，光佑文化。

洪世民（譯）（2011）。Mario Livio 著。**上帝是數學家？**。新北市：英華達。

洪萬生；洪贊天；林倉億（合譯）（2013）。Gaurav Suri, Hartosh Singh Bal 著。**爺爺的證明題**。臺北市：五南。

洪萬生；英家銘；HPM 團隊（合譯）（2014 二版）。William P. Berlinghoff; Fernando Q. Gouvêa 著。**溫柔科學史**。臺北市：五南。（2008 初版）

姬健梅（譯）（2009）。Albrecht Beutelspacher; Marcus Wagner 著。**如何穿過一張明信片**。臺北市：究竟出版。

孫愛萍（譯）（2016）。Rudolf Steiner 著。**教學中的平衡**。華德福生活館。

容士毅（譯）（2010）。Richard Courant; Herbert Robbins; Ian Stewart 著。**數學是什麼**。臺北縣新店市：左岸文化；遠足文化。

翁秉仁；趙學信（合譯）（2012）。丘成桐；Steve Nadis 著。**丘成桐談空間的內在形狀**。臺北市：遠流。

袁 媛；魏敏媛；陳順吉；單維彰（2015）。**高中數學教師對 99 高中數學課程綱要變革的意見調查**。教育科學期刊 14-2。

高嘉宏（2020）。**高中美感教育實驗課程發展與評量研究**。國立臺灣師範大學，台北市。

高翠霜（譯）（2013）。Paul Lockhart 著。**一個數學家的嘆息**。經濟新潮社。

崔光宙（1992）。**美感判斷發展研究**。台北市，師大書苑有限公司。

崔宜明（2010）。**康德哲學中的自由理念—在自由意志與自由權利之間**。華東師範大學學報（哲學社會科學版），2010，42（5）：45-53。

張家麟；黃毅英；林智中（2010）。**學校幾何課程的重整─為何教和如何教演繹幾何**。數學傳播季刊，34 卷，3 期。中央研究院 數學研究所。

教育部（2001）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。

教育部（2008）。**普通高級中學課程綱要**。

教育部（2009）。**十二年國教—數學領域**。

教育部（2018）。**教育部美感教育中長程計畫 第二期五年計畫（108-112 年）。**

曹亮吉（譯）（2014）。Eli Maor 著。**毛起來說無限**。臺北市：遠見天下文化。

畢馨云（譯）（2015）。Paul Lockhart 著。**這才是數學**。臺北市：經濟新潮社。

連永君（1979）。**西方π的歷史**。數學傳播季刊，3 卷，3 期。中央研究院 數學研究所。

郭維德；郭世銘；樊蘭英；王桂蓉；王培；嚴勇；劉皓明（合譯）（1996）。侯世達著。GODEL, ESCHER, BACH。商務印書館。

陳以禮（譯）（2013）。Clifford A. Pickover 著。**數學之書**。臺北市：時報文化。

陳可崗（譯）（2004）。Sherman Stein 著。**阿基米德幹了什麼好事？**。臺北市：天下遠見。

陳怡華（譯）（2009）。Stephen Bertman 著。**希臘人為什麼有智慧**。臺北市：時

報文化。

陳玟樺（2019）。**民國 57 年國中暫行課程標準數學教科書之初探（1968-1971）（上）**。數學傳播季刊，43 卷，3 期。中央研究院 數學研究所。

陳玟樺（2019）。**民國 57 年國中暫行課程標準數學教科書之初探（1968-1971）（下）**。數學傳播季刊，43 卷，4 期。中央研究院 數學研究所。

陸劍豪（譯）（2002）。Leonard Mlodinow 著。**歐幾里德之窗**。臺北市：究竟。

傅佩榮（譯）（2004）。Frederick Copleston 著。**西洋哲學史**。台北市，黎明文化。

單維彰（2016）。**素養、課程與教材—以數學為例**。教育脈動，5 期（2016/02/01）

葉玉珠（2002）。**高層次思考教學設計的要素分析**。中山通識教育學報，創刊號。國立中山大學。

葉李華；李國偉（譯）（1997）。Robert Osserman 著。**宇宙的詩篇**。臺北市：天下文化。

廖玉儀（譯）（2011）。Rudolf Steiner 著。**神智學**。宜蘭縣冬山鄉：人智學教育基金會。

劉柏宏（2007）。**探究歷史導向微積分課程與發展學生數學觀點之關係**。科學教育期刊 2007, 第十五卷第六期, 703-723。

樂為良（譯）（2011）。Michael J. Sandel 著。**正義：一場思辨之旅**。臺北市。雅言文化。

蔡坤憲（譯）（2006）。G. Polya 著。**怎樣解題**。臺北市：遠見天下。

蔡清田（2011）。**課程改革中的核心素養之理論基礎**。中正教育研究，第 10 卷，第 1 期。國立中正大學。

蔡聰明（1994）。**音樂與數學：從弦內之音到弦外之音**。數學傳播季刊，18 卷，1 期。中央研究院 數學研究所。

鄧麗君；廖玉儀（譯）（2007）。Michaela Glockler; Stefan Langhammer; Christof Wiechert 著。**邁向健康的教育**。宜蘭縣冬山鄉：人智學教育基金會；歌德館醫學部門和教育部門。

鄭章華；吳思慧；曾志華；陳玟樺；廖惠儀；蔡政樺（2018）。**中小學數學課程發展史（上冊）**。新北市：國家教育研究院。

鄭章華；吳思慧；曾志華；陳玟樺；廖惠儀；蔡政樺（2018）。**中小學數學課程發展史（下冊）**。新北市：國家教育研究院。

藍紀正；朱恩寬（譯）（2003）。Euclid 著。**幾何原本（Elements）**。陝西科學技術出版社。

譚建國（1996）。**數學美賞析（上）**。數學傳播季刊，20 卷，1 期。中央研究院數學研究所。

譚建國（1996）。**數學美賞析（下）**。數學傳播季刊，20 卷，2 期。中央研究院數學研究所。

蘇俊鴻（2011）。**畢氏定理**。科學發展，2011，3 月，459 期。

龔焱（2006）。**探索新幾何學的故事**。新竹市：凡異。